ΕΝΩΣΗ ΚΥΠΡΙΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ

23^{Η} ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Κυριακή, 05 Απριλίου, 2009 **Ώρα: 10:00 – 13:00**

Προτεινόμενες Λύσεις

ΘΕΜΑ 1 (10 μονάδες)

(α) Να αποδείξετε για ένα δορυφόρο σε κυκλική τροχιά γύρω από ένα πλανήτη, ότι το τετράγωνο της περιόδου περιφοράς είναι ανάλογο της τρίτης δύναμης της ακτίνας της τροχιάς του, δηλαδή, $T^2 \propto r^3$.

(β) Θεωρήστε τη Σελήνη να διαγράφει κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη. Η περίοδος της Σελήνης είναι 27,3 d (μέρες) και η ακτίνα της τροχιάς είναι $3{,}84 x 10^8$ m.
Δίνεται η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης: g_0 = 9,81 N/kg.
Να υπολογίσετε με τα πιο πάνω δεδομένα την ακτίνα της Γης. (Θεωρήστε τη Γη σφαιρική).

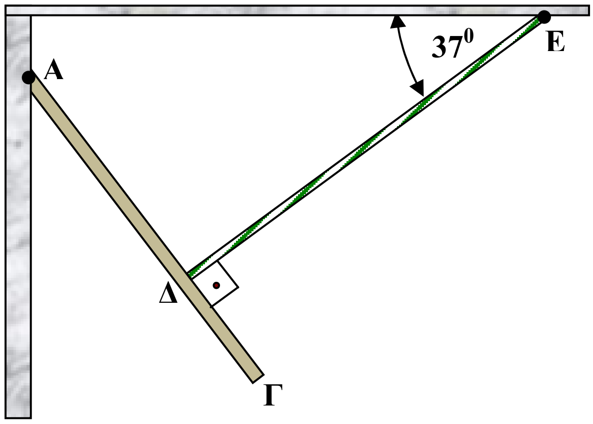
Λύση

(α) Η επιτάχυνση που δέχεται ο δορυφόρος από τον πλανήτη, στο ύψος της τροχιάς του, είναι ίση με την κεντρομόλο επιτάχυνση:
$g_h = a_k \Rightarrow \frac{GM}{r^2} = \frac{u^2}{r} \Rightarrow u^2 = \frac{GM}{r}$. Είναι: $u = \frac{2\pi r}{T}$. Άρα, $\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM}{r}$. Επομένως,
$T^2 = (\frac{4\pi^2}{GM})r^3$. Ο όρος στην παρένθεση είναι σταθερός. Άρα έχουμε $T^2 \propto r^3$.
(5 μον.)

(β) Είναι $GM = g_0 R^2$. Άρα η σχέση που βρήκαμε στο ερώτημα (α) γίνεται:
$T^2 = \frac{4\pi^2}{g_0 R^2} r^3 \Rightarrow R = \frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{r^3}{g_0}}$. Αντικαθιστούμε: $R = \frac{2\pi}{27{,}3.24.3600}\sqrt{\frac{(3{,}84 x 10^8)^3}{9{,}81}}$
$\Rightarrow R = 6400\ km.$. ***(5 μον.)***

ΘΕΜΑ 2 (10 μονάδες)

Η ομογενής δοκός ΑΓ στο σχήμα, μήκους ΑΓ = 4 m και μάζας 40 Kg, βρίσκεται σε στατική ισορροπία με τη βοήθεια του αβαρούς νήματος ΔΕ και της άρθρωσης στο σημείο Α. Το νήμα σχηματίζει ορθή γωνία με τη δοκό και γωνία 37º με οριζόντια σταθερή επιφάνεια. Η επιφάνεια στην οποία στηρίζεται η δοκός στο Α είναι κατακόρυφη. Το μήκος ΔΓ είναι 1,5 m.



Δίνεται: $g = 10\ m/s^2$, $συν37^0 = 0{,}8$ και $ημ37^0 = 0{,}6$.

(α) Να υπολογίσετε την τάση του νήματος.

(β) Να υπολογίσετε τη δύναμη που ασκεί η άρθρωση στη δοκό.

Λύση

(α) Στη δοκό ασκούνται: το βάρος της Β, η τάση του νήματος S και η δύναμη από την άρθρωση F. Παίρνουμε ροπές ως προς το σημείο Α. Έχουμε ισορροπία: $\Sigma M_{(A)} = 0$, Άρα, $S.(A\Delta) = B.(AK).\eta\mu\theta$, όπου Κ το μέσο της δοκού και θ = 37º. Αντικαθιστούμε: $S.2{,}5 = 400.2.0{,}6 \Rightarrow S = 192\ N$. ***(4 μον.)***

(β) Έστω F_x και F_y τα μέτρα των δύο συνιστωσών της δύναμης στη δοκό από την άρθρωση στο Α. Έχουμε: $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_x = S_x \Rightarrow F_x = S.\sigma\upsilon\nu\theta = 192.0{,}8 = 153{,}6\ N$, προς τα αριστερά.

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_y + S_y = B \Rightarrow F_y + S.\eta\mu\theta = B \Rightarrow F_y + 192.0{,}6 = 400 \Rightarrow F_y = 284{,}8\ N$, προς τα πάνω.

Το μέτρο της δύναμης από την άρθρωση είναι: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow F = 323{,}6\ N$.

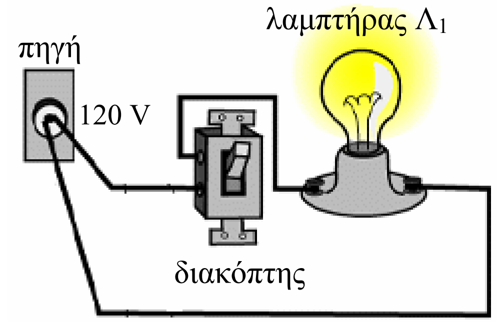
(4 μον.)

Η δύναμη F σχηματίζει γωνία φ με την κατακόρυφη επιφάνεια:

$\varepsilon\varphi\phi = \dfrac{F_x}{F_y} \Rightarrow \phi = 28{,}3^0$. ***(2 μον.)***

ΘΕΜΑ 3 (10 μονάδες)

Θεωρήστε ένα απλό κύκλωμα που αποτελείται από ηλεκτρική πηγή συνεχούς τάσης ηλεκτρεγερτικής δύναμης, Η.Ε.Δ., 120 V, αμελητέας εσωτερικής αντίστασης, ένα διακόπτη αμελητέας αντίστασης και ένα λαμπτήρα $Λ_1$, όπως δείχνει το σχήμα. Η κανονική τάση λειτουργίας του λαμπτήρα είναι 120 V.



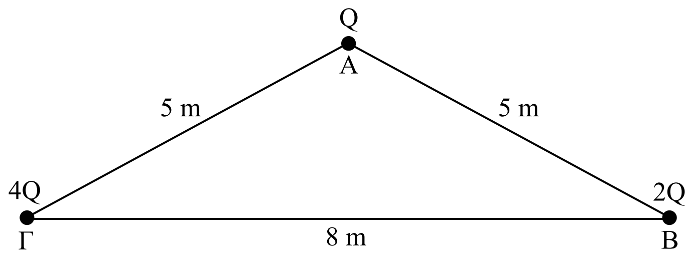
(α) Συνδέουμε τώρα σε σειρά με τον πρώτο λαμπτήρα $Λ_1$ ένα δεύτερο πανομοιότυπο λαμπτήρα $Λ_2$.

Να συγκρίνετε το ρεύμα που διαρρέει τους δύο λαμπτήρες $Λ_1$ και $Λ_2$ με το ρεύμα που είχαμε αρχικά στον λαμπτήρα $Λ_1$ πριν συνδέσουμε τον δεύτερο λαμπτήρα $Λ_2$. Εξηγήστε.

(β) Να συγκρίνετε τη φωτοβολία του λαμπτήρα $Λ_1$ πριν και μετά τη σύνδεση του δεύτερου λαμπτήρα $Λ_2$. Εξηγήστε.
(γ) Συνδέουμε τώρα παράλληλα με τους λαμπτήρες $Λ_1$ και $Λ_2$ τρίτο πανομοιότυπο λαμπτήρα $Λ_3$. Να συγκρίνετε τη φωτοβολία των τριών λαμπτήρων. Εξηγήστε.

Λύση
(α) Με τους δύο λαμπτήρες σε σειρά η αντίσταση του κυκλώματος διπλασιάζεται σε σχέση με την αντίσταση του κυκλώματος με τον ένα λαμπτήρα. Εφόσον η πηγή στα δύο κυκλώματα έχει την ίδια Η.Ε.Δ., το ρεύμα στο κύκλωμα με τους δύο λαμπτήρες γ είναι το μισό του ρεύματος στο κύκλωμα με τον ένα λαμπτήρα. ***(3 μον.)***
(β) Μετά τη σύνδεση του δεύτερου λαμπτήρα, σε σειρά με τον πρώτο λαμπτήρα, η τάση στα άκρα του καθενός γίνεται η μισή της τάσης λειτουργίας του ενός λαμπτήρα. Άρα η φωτοβολία του λαμπτήρα $Λ_1$ μετά τη σύνδεση του δεύτερου λαμπτήρα μειώνεται σε σχέση με τη φωτοβολία που είχε ο λαμπτήρας αυτός πριν τη σύνδεση του δεύτερου λαμπτήρα. ***(3 μον.)***
(γ) Η φωτοβολία των λαμπτήρων $Λ_1$ και $Λ_2$ είναι η ίδια. Ο λαμπτήρας $Λ_3$, έχοντας στα άκρα του την κανονική τάση λειτουργίας, φωτοβολεί ποιο έντονα από τους άλλους δύο, εφόσον οι άλλοι δύο έχουν στα άκρα τους ο καθένας τη μισή τάση από την τάση του $Λ_3$. ***(4 μον.)***

ΘΕΜΑ 4 (10 μονάδες)
Τρία θετικά σημειακά φορτία τοποθετούνται αντίστοιχα στις τρεις κορυφές τριγώνου, όπως δείχνει το σχήμα. (Τα φορτία κρατούνται με κατάλληλο μηχανισμό ακίνητα).
Δίνεται: Q = + 1 μC.
Σταθερά Coulomb:
$K_0 = 9x10^9$ N.m^2.C^{-2}.



(α) Να υπολογίσετε **(i)** το συνολικό δυναμικό και **(ii)** την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που οφείλεται και στα τρία φορτία, στο μέσο της πλευράς ΒΓ.
(β) Να υπολογίσετε τη συνολική ενέργεια που χρειάστηκε για να φέρουμε τα τρία φορτία από το άπειρο στα σημεία Α, Β και Γ αντίστοιχα. (Θεωρήστε το άπειρο ως σημείο μηδενικής ενέργειας).

Λύση
(α) (i) Είναι: $V = K(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} + \frac{Q_3}{r_3}) = 9x10^9(\frac{10^{-6}}{3} + \frac{2x10^{-6}}{4} + \frac{4x10^{-6}}{4}) = 16500\,V.$

(2 μον.)

(ii) Βρίσκουμε το μέτρο της έντασης, στο μέσο της ΒΓ, που οφείλεται στο κάθε φορτίο ξεχωριστά.

$$E_1 = K\frac{Q_1}{r^2} = 9x10^9\,\frac{10^{-6}}{3^2} = 1000\,V/m$$

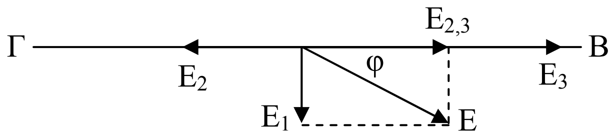
$$E_2 = K\frac{Q_2}{r_2^2} = 9x10^9\,\frac{2x10^{-6}}{4^2} = 1125\,V/m$$

$$E_3 = K\frac{Q_3}{r_3^2} = 9x10^9\,\frac{4x10^{-6}}{4^2} = 2250\,V/m$$

Τα διανύσματα των E_2 και E_3 είναι στη διεύθυνση της ΒΓ και είναι αντίθετα . Άρα, στη διεύθυνση της ΒΓ, η συνολική ένταση έχει μέτρο 1125 V/m με φορά προς το Β. Η ένταση E_1 έχει φορά κάθετη στο ΒΓ. Άρα το μέτρο της συνισταμένης έντασης είναι: $E = \sqrt{E_{2,3}^2 + E_1^2} = \sqrt{1125^2 + 1000^2} = 1505\, V/m$.***(3 μον.)***

Η συνισταμένη ένταση Ε σχηματίζει γωνία φ με τη διεύθυνση ΒΓ:

$\varepsilon\varphi\phi = \dfrac{E_1}{E_{2,3}} \Rightarrow \phi = 41{,}6^0$.***(1 μον.)***



(β) Το έργο που κάμνουμε ενάντια στο πεδίο όταν μεταφέρουμε το φορτίο Q_2 από το άπειρο στο σημείο Β που απέχει απόσταση $r_{A,B}$ από το φορτίο Q_1, είναι: $W_{\infty,B} = -Q_2(V_\infty - V_B)$. Είναι $V_\infty = 0$ και $V_B = K\dfrac{Q_1}{r_{A,B}}$. Άρα, $W_{\infty,B} = Q_2 V_B = K\dfrac{Q_1 Q_2}{r_{A,B}}$.

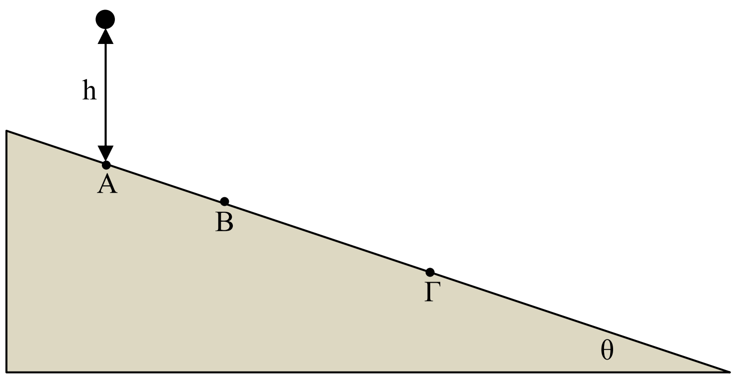
Το έργο που εμείς κάμνουμε μετατρέπεται σε δυναμική ηλεκτρική ενέργεια στο σύστημα των δύο θετικών φορτίων.

Όταν μεταφέρουμε το τρίτο φορτίο Q_3 στο σημείο Γ που απέχει απόσταση $r_{B,\Gamma}$ από το Q_2 και απόσταση $r_{A,\Gamma}$ από το Q_1, χρειαζόμαστε ενέργεια που είναι ίση με το έργο που κάμνουμε. Άρα, $W_{\infty,\Gamma} = -Q_3(V_\infty - V_\Gamma) = Q_3 V_\Gamma = KQ_3(\dfrac{Q_1}{r_{A,\Gamma}} + \dfrac{Q_2}{r_{B,\Gamma}})$. Έτσι η συνολική ενέργεια είναι: $W = W_{\infty,B} + W_{\infty,\Gamma} = K(\dfrac{Q_1 Q_2}{r_{A,B}} + \dfrac{Q_1 Q_3}{r_{A,\Gamma}} + \dfrac{Q_2 Q_3}{r_{B,\Gamma}})$. Αντικαθιστούμε:

$W = 9x10^9(\dfrac{2x10^{-12}}{5} + \dfrac{4x10^{-12}}{5} + \dfrac{8x10^{-12}}{8}) \Rightarrow W = 1{,}98x10^{-2}\ J$. ***(4 μον.)***

<u>ΘΕΜΑ 5</u> <u>(15 μονάδες)</u>

Μια μικρή ελαστική μπάλα αφήνεται να πέσει ελεύθερα, υπό την επίδραση μόνο της βαρύτητας της Γης, από ύψος h στην επιφάνεια ενός κεκλιμένου επιπέδου που σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο. Οι κρούσεις της μπάλας με την επιφάνεια του κεκλιμένου επιπέδου γίνονται χωρίς απώλειες της μηχανικής ενέργειας. Τα σημεία Α, Β και Γ είναι τα τρία πρώτα σημεία επαφής της μπάλας με την επιφάνεια του κεκλιμένου επιπέδου.



(α) Να γράψετε τις εξισώσεις που δίνουν τη θέση της μπάλας. Να θεωρήσετε το σημείο Α ως σημείο αναφοράς.

(β) Να υπολογίσετε το λόγο των αποστάσεων (ΑΒ):(ΒΓ)

Λύση

(α) Το μέτρο της ταχύτητας με την οποία η μπάλα κτυπά στο κεκλιμένο επίπεδο για πρώτη φορά, σημείο Α, είναι: $u_0 = \sqrt{2gh}$. (Η σχέση βρίσκεται από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας ή από τις εξισώσεις της ελεύθερης πτώσης). Η ταχύτητα στο Α σχηματίζει γωνία θ με την κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο. Η ταχύτητα έχει συνιστώσα μέτρου $u_0\eta\mu\theta$ στη διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου και $u_0\sigma\upsilon\nu\theta$ στη διεύθυνση κάθετη με το κεκλιμένο. Η επιτάχυνση της βαρύτητας g έχει συνιστώσες μέτρου $g\eta\mu\theta$ και $g\sigma\upsilon\nu\theta$ στη διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου και στη διεύθυνση κάθετη με το κεκλιμένο αντίστοιχα.

Οι εξισώσεις που δίνουν τη θέση της μπάλας ως προς το σημείο Α είναι άρα,

$x = (u_0\eta\mu\theta)t + \frac{1}{2}(g\eta\mu\theta)t^2$ και

$y = (u_0\sigma\upsilon\nu\theta)t - \frac{1}{2}g(\sigma\upsilon\nu\theta)t^2$. ***(7 μον.)***

Μετά το σημείο Β και για κάθε σημείο επαφής της μπάλας με το επίπεδο ισχύουν οι ίδιες εξισώσεις εάν αντικαταστήσουμε τα $u_0\sigma\upsilon\nu\theta$ και $u_0\eta\mu\theta$ με τις αντίστοιχες συνιστώσες της ταχύτητας που θα έχει η μπάλα στο νέο σημείο επαφής.

(β) Στο σημείο Β είναι $y = 0$. Άρα,

$$0 = u_0\sigma\upsilon\nu\theta.t - \frac{1}{2}g(\sigma\upsilon\nu\theta)t^2 \Rightarrow 0 = t\sigma\upsilon\nu\theta(u_0 - \frac{1}{2}gt) \Rightarrow t = \frac{2u_0}{g} = \frac{2\sqrt{2gh}}{g} = \sqrt{\frac{8h}{g}}.$$

Αντικαθιστούμε το χρόνο αυτό στην εξίσωση για το x.

$x = (u_0\eta\mu\theta)\frac{2u_0}{g} + \frac{1}{2}(g\eta\mu\theta)(\frac{2u_0}{g})^2 = \frac{4u_0^2}{g}\eta\mu\theta = 8h\eta\mu\theta$, που δίνει το μήκος ΑΒ.

Η ταχύτητα στη διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου, από το Α έως το Β, είναι: $u_x = u_0\eta\mu\theta + (g\eta\mu\theta)t$

Η ταχύτητα στη διεύθυνση κάθετη του κεκλιμένου επιπέδου, από το Α έως το Β, είναι: $u_\upsilon = u_0\sigma\upsilon\nu\theta - (g\sigma\upsilon\nu\theta)t$.

Το μέτρο της ταχύτητας στη διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου, στο σημείο Β, είναι:

$$u_x = u_0\eta\mu\theta + (g\eta\mu\theta)\frac{2u_0}{g} = 3u_0\eta\mu\theta = 3\sqrt{2gh}\,\eta\mu\theta.$$

Το μέτρο της ταχύτητας στη διεύθυνση κάθετη του κεκλιμένου επιπέδου, στο σημείο Β, είναι:

$u_y = u_0\sigma\upsilon\nu\theta - (g\sigma\upsilon\nu\theta)\frac{2u_0}{g} = -u_0\sigma\upsilon\nu\theta = -\sqrt{2gh}\,\sigma\upsilon\nu\theta$. Αμέσως μετά την επαφή της μπάλας στο Β η ταχύτητα αυτή, u_y, αλλάζει φορά και άρα πρόσημο. Έχουμε τις εξής εξισώσεις για τη θέση από το Β έως το Γ:

$x = (3u_0\eta\mu\theta)t + \frac{1}{2}(g\eta\mu\theta)t^2$, $y = (u_0\sigma\upsilon\nu\theta)t - \frac{1}{2}g(\sigma\upsilon\nu\theta)t^2$.

Στο Γ, $y = 0$. Άρα,

$$y = (u_0\sigma\upsilon\nu\theta)t - \frac{1}{2}g(\sigma\upsilon\nu\theta)t^2 = 0 \Rightarrow t\sigma\upsilon\nu\theta(u_0 - \frac{1}{2}gt) = 0 \Rightarrow t = \frac{2u_0}{g} = \frac{\sqrt{8h}}{g}.$$

Παρατηρούμε ότι ο χρόνος κίνησης της μπάλας από το Α έως το Β είναι ίδιος με το χρόνο από το Β έως το Γ. Η απόσταση ΒΓ βρίσκεται εάν αντικαταστήσουμε το χρόνο $t=\dfrac{2u_0}{g}=\dfrac{\sqrt{8h}}{g}$, στην εξίσωση για το x:

$$x=(3u_0\eta\mu\theta)\frac{2u_0}{g}+\frac{1}{2}(g\eta\mu\theta)(\frac{2u_0}{g})^2=\frac{8u_0^2}{g}\eta\mu\theta=16h\eta\mu\theta$$, που δίνει το μήκος ΒΓ.

Παρατηρούμε ότι (ΒΓ) = 2(ΑΒ). Άρα, (ΑΒ):(ΒΓ) = 1:2. ***(8 μον.)***

ΘΕΜΑ 6 (15 μονάδες)

Το βαγόνι στο σχήμα έχει μάζα $m=500\,kg$ μαζί με τους επιβάτες. Στο σημείο Α το βαγόνι έχει ταχύτητα μέτρου $\upsilon_A=10\ m/s$. Στο ψηλότερο σημείο Β της τροχιάς του το βαγόνι έχει ταχύτητα μέτρου υ_B έτσι ώστε μόλις που χάνει επαφή με την τροχιά, στο σημείο αυτό. Σε όλη τη διαδρομή οι τριβές είναι αμελητέες. Δίνεται: g = 10 m/s^2.

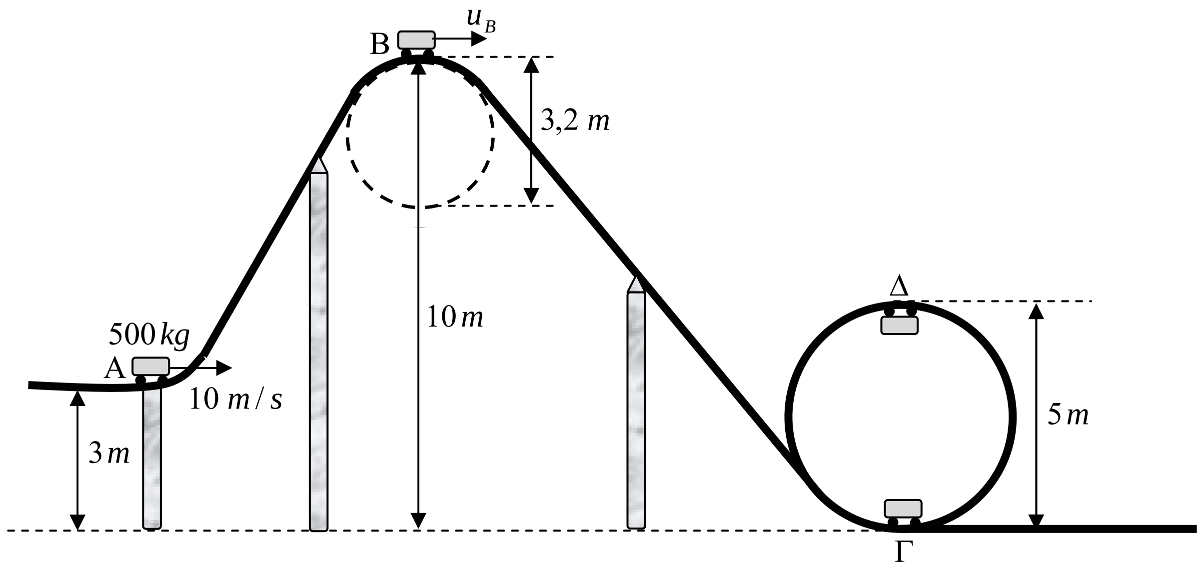
(α) Να υπολογίσετε τη υ_B.

(β) Να υπολογίσετε την ενέργεια που προσφέρθηκε στο βαγόνι από τη μηχανή του βαγονιού, από το σημείο Α μέχρι το σημείο Β.

Αμέσως μετά το σημείο Β το βαγόνι κινείται ελεύθερα χωρίς την ισχύ της μηχανής. Κινείται στην τροχιά ΒΓ πριν εισέλθει σε κατακόρυφη τροχιά, όπως δείχνει το σχήμα.

(γ) Να υπολογίσετε τη δύναμη που ασκεί το βαγόνι στην τροχιά στο χαμηλότερο σημείο Γ της κυκλικής του τροχιάς.

(δ) Να υπολογίσετε τη δύναμη που ασκεί το βαγόνι στην τροχιά στο ψηλότερο σημείο Δ της κυκλικής του τροχιάς.



Λύση

(α) Στο Β το βαγόνι μόλις που χάνει επαφή. Άρα η κάθετη δύναμη στο βαγόνι από την τροχιά είναι μηδέν. Το βάρος ενεργεί ως κεντρομόλος δύναμη:

$$mg = \frac{mu_B^2}{r} \Rightarrow u_B = \sqrt{rg} = 4\ m/s.$$ ***(3 μον.)***

(β) Η ενέργεια που προσφέρθηκε στο βαγόνι από τη μηχανή του βαγονιού, από το σημείο Α μέχρι το σημείο Β είναι ίση με τη διαφορά της μηχανικής ενέργειας του βαγονιού στα δύο σημεία:

$$E = \frac{1}{2}mu_B^2 + mgh - \frac{1}{2}mu_A^2 = \frac{1}{2}.500.4^2 + 500.10.7 - \frac{1}{2}.500.10^2.$$

$$\Rightarrow E = 39000 - 25000 = 14000\ J.$$ ***(2 μον.)***

(γ) Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας βρίσκουμε το μέτρο της ταχύτητας στο Γ:

$$\frac{1}{2}mu_B^2 + mgh = \frac{1}{2}mu_\Gamma^2 \Rightarrow \frac{1}{2}.4^2 + 10.10 = \frac{1}{2}.u_\Gamma^2 \Rightarrow u_\Gamma = \sqrt{216}\ m/s.$$ ***(2 μον.)***

Στο σημείο Γ η κεντρομόλος δύναμη είναι η συνισταμένη των δυνάμεων του βάρους και της κάθετης δύναμης που ασκεί η τροχιά. Οι δυνάμεις έχουν αντίθετη φορά. Άρα:

$$N_\Gamma - mg = \frac{mu_\Gamma^2}{r} \Rightarrow N = m(g + \frac{u_\Gamma^2}{r}) = 500(10 + \frac{216}{2,5}) = 48200\ N.$$ ***(3 μον.)***

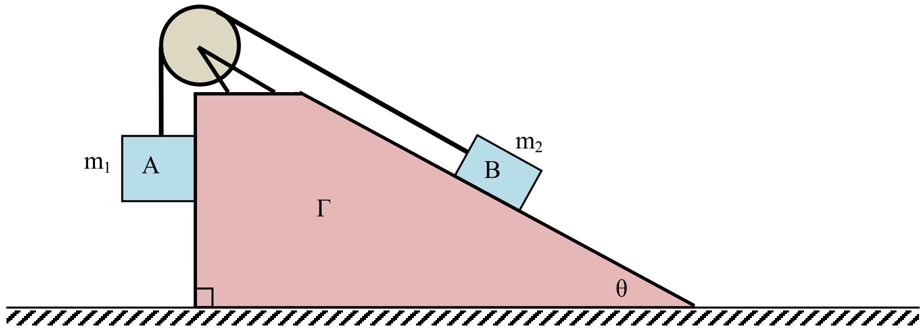
(δ) Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας βρίσκουμε το μέτρο της ταχύτητας στο Δ:

$$\frac{1}{2}mu_\Delta^2 + mgh = \frac{1}{2}mu_\Gamma^2 \Rightarrow \frac{1}{2}.u_\Delta^2 + 10.5 = \frac{1}{2}.216 \Rightarrow u_\Delta = \sqrt{116}\ m/s.$$ ***(2 μον.)***

Στο σημείο Δ η κεντρομόλος δύναμη είναι η συνισταμένη των δυνάμεων του βάρους και της κάθετης δύναμης που ασκεί η τροχιά. Οι δυνάμεις έχουν την ίδια φορά. Άρα,

$$N_\Delta + mg = \frac{mu_\Delta^2}{r} \Rightarrow N_\Delta = m(\frac{u_\Delta^2}{r} - g) = 500(\frac{116}{2,5} - 10) = 18200\ N.$$ ***(3 μον.)***

ΘΕΜΑ 7 (15 μονάδες)
Το σχήμα δείχνει τρία σώματα. Ένα σώμα Γ που βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές και δύο σώματα Α και Β με μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα. Το σώμα Α βρίσκεται σε επαφή με την κατακόρυφη επιφάνεια του σώματος Γ και το σώμα Β βρίσκεται σε επαφή με την κεκλιμένη επιφάνεια του Γ, η οποία σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια επιφάνεια. Ο συντελεστής στατικής τριβής και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης για τα δύο σώματα και τις επιφάνειες που είναι σε επαφή είναι αντίστοιχα $\mu_{\sigma\tau}$ και $\mu_{o\lambda}$. Τα σώματα Α και Β συνδέονται με αβαρές νήμα το οποίο περνά μέσα από αβαρή τροχαλία που δεν παρουσιάζει τριβές. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g.

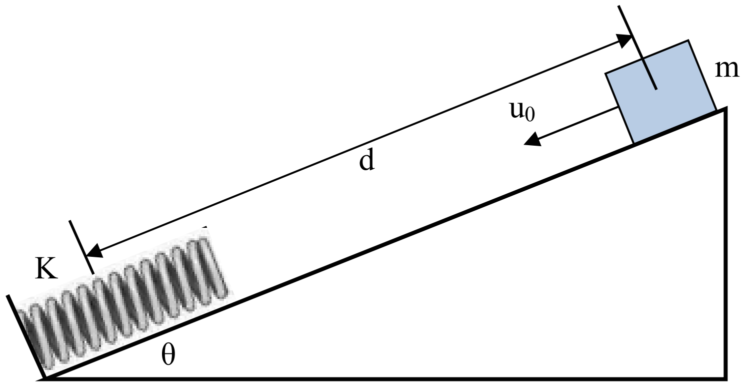


(α) Το σώμα Γ κρατείται ακίνητο ως προς την οριζόντια επιφάνεια. Να εξάγετε τη σχέση που πρέπει να ικανοποιείται ώστε τα σώματα Α και Β να ολισθαίνουν με σταθερή επιτάχυνση μέτρου α, το Α να κατέρχεται και το Β να ανεβαίνει.
(β) Το σύστημα των τριών σωμάτων τώρα επιταχύνεται οριζόντια προς τα αριστερά με σταθερή επιτάχυνση μέτρου α. Να εξάγετε τη σχέση που πρέπει να ικανοποιείται ώστε το σώμα Α να μην ολισθαίνει προς τα κάτω.

Λύση
(α) Το σώμα Α δέχεται το βάρος του και την τάση του νήματος. Το σώμα Β δέχεται το βάτος του, τη τάση του νήματος και την τριβή ολίσθησης. Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα δίνει: $m_1 g - m_2 g\eta\mu\theta - \mu_{o\lambda} m_2 g\sigma\upsilon\nu\theta = (m_1 + m_2)a$. ***(5 μον.)***

(β) Τώρα το σώμα Α, επιπρόσθετα με τις δυνάμεις που δεχόταν πριν, δέχεται οριζόντια δύναμη από το σώμα Γ προς τα αριστερά μέτρου m_1α και την στατική τριβή αντίθετη με το βάρος όταν εξετάζουμε την περίπτωση να μην ολισθαίνει προς τα κάτω. Το σώμα Β, επιπρόσθετα με τις δυνάμεις που δεχόταν πριν, δέχεται από το σώμα Γ οριζόντια δύναμη προς τα δεξιά μέτρου m_2α.
Η συνθήκη ισορροπίας του Α ως προς το σώμα Γ δίνει: $m_1 g = T_1 + S$, όπου T_1 και S είναι η στατική τριβή και η τάση που δέχεται το σώμα Α. Είναι $T_1 \le \mu_{\sigma\tau} N_A$. Είναι $N_A = m_1 a$. Άρα, $T_1 \le \mu_{\sigma\tau} m_1 a \Rightarrow m_1 g - S \le \mu_{\sigma\tau} m_1 a \Rightarrow m_1 g \le S + \mu_{\sigma\tau} m_1 a$.***(4 μον.)***
Η συνθήκη ισορροπίας του Β ως προς το σώμα Γ, στη διεύθυνση κάθετα με το κεκλιμένο επίπεδο, δίνει:
$N_B + m_2 a\eta\mu\theta = m_2 g\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow N_B = m_2 g\sigma\upsilon\nu\theta - m_2 a\eta\mu\theta$.
Η συνθήκη ισορροπίας του Β ως προς το σώμα Γ, στη διεύθυνση παράλληλα με το κεκλιμένο επίπεδο, δίνει: $S = m_2 a\sigma\upsilon\nu\theta + m_2 g\eta\mu\theta + T_2$, όπου T_2 είναι η στατική τριβή. Είναι: $T_2 \le \mu_{\sigma\tau} N_B \Rightarrow T_2 \le \mu_{\sigma\tau} m_2 (g\sigma\upsilon\nu\theta - a\eta\mu\theta)$. Άρα,
$S - m_2 a\sigma\upsilon\nu\theta - m_2 g\eta\mu\theta \le \mu_{\sigma\tau} m_2 (g\sigma\upsilon\nu\theta - a\eta\mu\theta) \Rightarrow$
$S \le \mu_{\sigma\tau} m_2 (g\sigma\upsilon\nu\theta - a\eta\mu\theta) + m_2 (a\sigma\upsilon\nu\theta + g\eta\mu\theta)$.
Η συνθήκη το σώμα Α να μην ολισθαίνει προς τα κάτω, $m_1 g \le S + \mu_{\sigma\tau} m_1 a$, δίνει:
$m_1 g \le \mu_{\sigma\tau} m_1 a + \mu_{\sigma\tau} m_2 (g\sigma\upsilon\nu\theta - a\eta\mu\theta) + m_2 (a\sigma\upsilon\nu\theta + g\eta\mu\theta)$.***(6 μον.)***

ΘΕΜΑ 8 (15 μονάδες)
Το σώμα μάζας m = 150 kg κινείται με αρχική ταχύτητα μέτρου u_0 = 5 m/s κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου με κλίση θ = 37^0. Ο συντελεστής στατικής τριβής του επιπέδου και του σώματος είναι 0,45 και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι 0,30. Το σώμα σταματά με τη βοήθεια αβαρούς ελατηρίου το οποίο βρίσκεται στο κάτω μέρος του επιπέδου με τον άξονά του παράλληλο με τη διεύθυνση του επιπέδου. Όταν το σώμα σταματά διανύει συνολική απόσταση d = 4 m κατά μήκος του επιπέδου και μένει ακίνητο στο σημείο αυτό χωρίς να γυρίσει προς τα πίσω.
Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή της σταθεράς του ελατηρίου.
Δίνεται: g = 10 m/s^2, συν37^0 = 0,8 και ημ37^0 = 0,6.



Λύση

Η αρχή διατήρησης της ενέργειας δίνει: $mgh+\frac{1}{2}mu_0^2=\frac{1}{2}Kx^2+Td$, όπου x είναι η συσπείρωση του ελατηρίου, $h=d\eta\mu\theta$ και T είναι η τριβή ολίσθησης. ***(5 μον.)***

$T=\mu_{o\lambda}mg\sigma\upsilon\nu\theta$. Άρα, $mgd\eta\mu\theta+\frac{1}{2}mu_0^2=\frac{1}{2}Kx^2+d\mu_{o\lambda}mg\sigma\upsilon\nu\theta$.

Όταν το σώμα σταματά από το ελατήριο και μένει ακίνητο η συνθήκη ισορροπίας δίνει: $F=T_{\sigma\tau}+mg\eta\mu\theta$, όπου F η δύναμη που ασκεί το ελατήριο στο σώμα και $T_{\sigma\tau}$ είναι η στατική τριβή. Είναι $F=Kx$. Επειδή ζητούμε τη μέγιστη τιμή της σταθεράς του ελατηρίου, K, θεωρούμε τη στατική τριβή να είναι στη φορά του $mg\eta\mu\theta$ με τη μέγιστη δυνατή τιμή. Επομένως,

$Kx=T_{\sigma\tau}+mg\eta\mu\theta\Rightarrow K=\frac{T_{\sigma\tau}+mg\eta\mu\theta}{x}=\frac{\mu_{\sigma\tau}mg\sigma\upsilon\nu\theta+mg\eta\mu\theta}{x}$. ***(4 μον.)***

Αντικαθιστούμε τη σχέση αυτή στη σχέση που βρήκαμε από τη διατήρηση της ενέργειας: $mgd\eta\mu\theta+\frac{1}{2}mu_0^2=\frac{1}{2}x(\mu_{\sigma\tau}mg\sigma\upsilon\nu\theta+mg\eta\mu\theta)+d\mu_{o\lambda}mg\sigma\upsilon\nu\theta$ ή

$gd\eta\mu\theta+\frac{1}{2}u_0^2=\frac{1}{2}xg(\mu_{\sigma\tau}\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\theta)+d\mu_{o\lambda}g\sigma\upsilon\nu\theta$. Αντικαθιστούμε:

$$10.4.0,6+\frac{1}{2}.5^2=\frac{1}{2}.10x(0,45.0,8+0,6)+4.0,30.10.0,8\Rightarrow 24+12,5=5x(0,96+0,6)+9,6$$

$\Rightarrow 36,5=7,8x+9,6\Rightarrow x=3,45\ m$. Αντικαθιστούμε την τιμή αυτή στη σχέση που βρήκαμε για τη σταθερά του ελατηρίου:

$K=\frac{\mu_{\sigma\tau}mg\sigma\upsilon\nu\theta+mg\eta\mu\theta}{x}=\frac{1500(0,45.0,8+0,6)}{3,449}=417,5\ N/m$. ***(6 μον.)***