ΕΝΩΣΗ ΚΥΠΡΙΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ

24 Η ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ (Πρώτη Φάση)

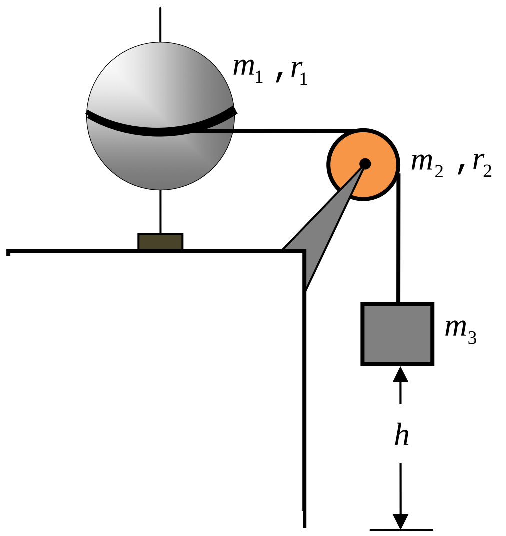
Κυριακή, 17 Ιανουαρίου, 2010

Ώρα: 10.00 – 13.00

<u>Θέματα και Προτεινόμενες Λύσεις</u>

<u>ΘΕΜΑ 1 (20 μονάδες)</u>

Μια συμπαγής ομογενής σφαίρα μάζας m_1 και ακτίνας r_1 μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο της. Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς τον άξονα περιστροφής είναι $I_1 = \frac{2}{5} m_1 r_1^2$. Ένα αβαρές μη ελαστικό νήμα τυλίγεται αρκετές φορές γύρω από τη σφαίρα, και στο οριζόντιο επίπεδο που περνά από το κέντρο της (επίπεδο ισημερινού). Το νήμα περνά από μια ομογενή τροχαλία μάζας m_2 και ακτίνας r_2 που μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από το κέντρο της και στη συνέχεια προσδένεται σε ένα κύβο μάζας m_3. Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής είναι $I_2 = \frac{1}{2} m_2 r_2^2$.



(α) Αφήνουμε τον κύβο από την ηρεμία να πέσει ελεύθερα κατά ύψος h, με το νήμα να συνεχίζει να είναι περιτυλιγμένο γύρω από τη σφαίρα. Να αποδείξετε τη σχέση που δίνει τη γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας, ως συνάρτηση των μεγεθών m_1, m_2, m_3, h, r_2 και της επιτάχυνσης της βαρύτητας g. ***(5 μον.)***

(β) <u>Σε αυτό το ερώτημα</u> αλλάζουμε τη συμπαγή σφαίρα με μια κούφια σφαίρα της ίδιας μάζας και ακτίνας με την πρώτη. Επαναλαμβάνουμε την πιο πάνω διαδικασία με τον ίδιο τρόπο. Αφήνουμε τον κύβο να πέσει και πάλι κατά ύψος h.

(i) Να εξηγήσετε κατά πόσο το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας, θα μείνει το ίδιο, θα αυξηθεί ή θα ελαττωθεί, σε σχέση με το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας που είχε στο ερώτημα (α). ***(5 μον.)***

(ii) Να αποδείξετε τη σχέση που δίδει την κινητική ενέργεια της σφαίρας ως συνάρτηση της ροπής αδράνειάς της και να κάνετε ποιοτικά τη γραφική παράστασή της. ***(5 μον.)***

(iii) Χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση που κάνατε στο (β) (ii) ή με οποιονδήποτε άλλον τρόπο, να εξηγήσετε κατά πόσο η κινητική ενέργεια της κούφιας σφαίρας θα αυξηθεί, θα ελαττωθεί ή θα παραμείνει σταθερή σε σχέση με την κινητική ενέργεια της συμπαγούς σφαίρας. ***(5 μον.)***

Λύση

(α) Χρησιμοποιούμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας: Η μείωση της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του κύβου μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια των τριών σωμάτων:

$$m_3gh = \frac{1}{2}m_3u_3^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 .$$ ***(2 μον.)***

Είναι $u_3 = \omega_2 r_2$ και $\omega_1 = \frac{u_3}{r_1} = \frac{\omega_2 r_2}{r_1}$. Άρα, ***(1 μον.)***

$$\Rightarrow m_3gh = \frac{1}{2}m_3\omega_2^2r_2^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_2^2\frac{r_2^2}{r_1^2} \Rightarrow m_3gh = \frac{1}{2}\omega_2^2(m_3r_2^2 + I_2 + I_1\frac{r_2^2}{r_1^2})$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{2m_3g}{m_3r_2^2 + I_2 + I_1\frac{r_2^2}{r_1^2}}} .$$

Τέλος, αντικαθιστούμε τις σχέσεις για τις ροπές αδράνειας των δύο στερεών:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2m_3g}{m_3r_2^2 + \frac{1}{2}m_2r_2^2 + \frac{2}{5}m_1r_1^2\frac{r_2^2}{r_1^2}}} \Rightarrow \omega_2 = \frac{1}{r_2}\sqrt{\frac{20m_3gh}{10m_3 + 5m_2 + 4m_1}} .$$ ***(2 μον.)***

(β) (i) Η κούφια σφαίρα έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας από τη συμπαγή σφαίρα, όταν οι δύο σφαίρες έχουν την ίδια μάζα και ακτίνα.
Από την πιο πάνω σχέση που δίνει τη γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας σε σχέση με τις ροπές αδράνειας των δύο στερεών, είναι φανερό ότι η αύξηση της ροπής αδράνειας της σφαίρας (από συμπαγή σε κούφια), μειώνει τη γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας. ***(5 μον.)***
<u>Ισοδύναμα</u>: Όσο μεγαλύτερη είναι η ροπή αδράνειας ενός στερεού σώματος τόσο πιο μικρή είναι η επιτάχυνση που αποκτά, όταν και πάλι ο κύβος πέσει κατά ύψος h. Άρα, η επιτάχυνση και η ταχύτητα όλων των σωμάτων (η γραμμική ταχύτητα του κύβου και οι γωνιακές ταχύτητες της τροχαλίας και της σφαίρας) θα ελαττωθούν.

(ii) Εξάγουμε πρώτα η σχέση της γωνιακής ταχύτητας της σφαίρας ως συνάρτηση της ροπής αδράνειάς της.

Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας: $m_3gh = \frac{1}{2}m_3u_3^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2$

$$\Rightarrow m_3gh = \frac{1}{2}m_3\omega_1^2r_1^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}m_2r_1^2\omega_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2 \Rightarrow 4m_3gh = r_1^2\omega_1^2(2m_3 + m_2 + \frac{2I}{r_1^2}) .$$

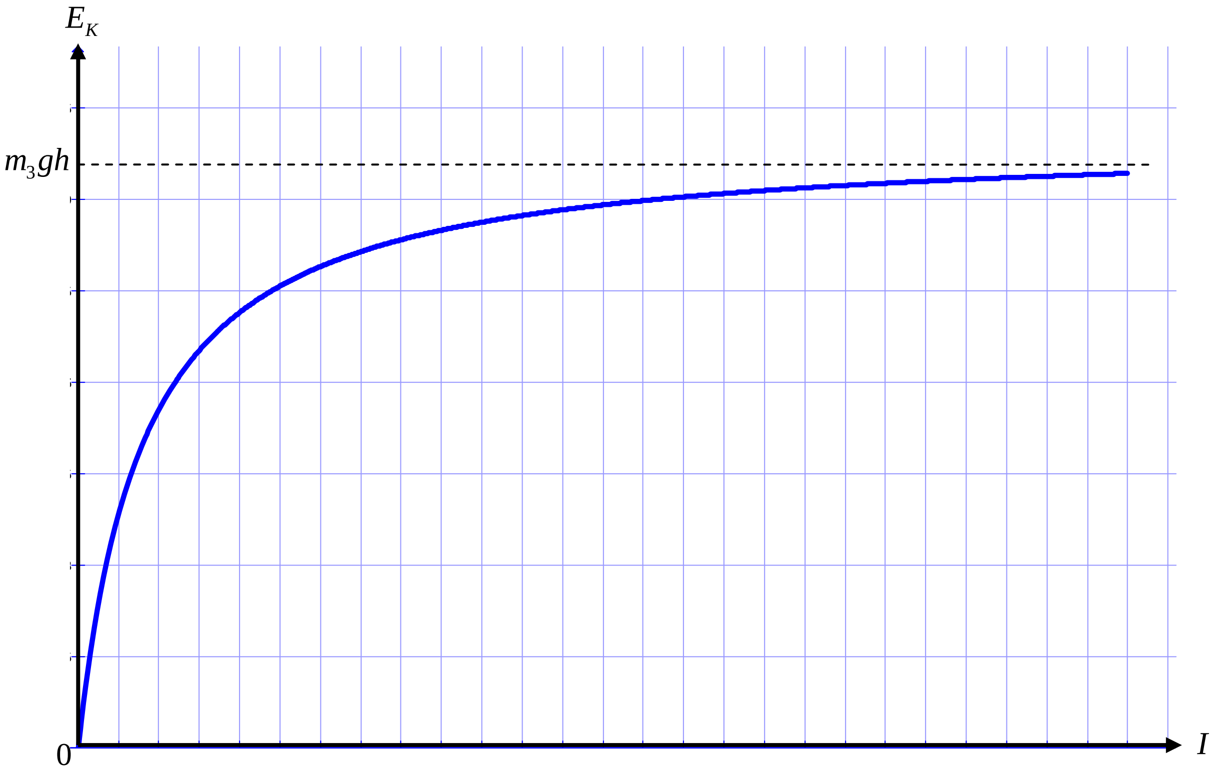
Άρα, $\Rightarrow \omega_1^2 = \frac{4m_3gh}{r_1^2(2m_3 + m_2 + \frac{2I}{r_1^2})}$, όπου I είναι η ροπή αδράνειας της σφαίρας.

Επομένως η κινητική ενέργεια της σφαίρας είναι:

$$E_K = \frac{1}{2} I \omega_1^2 \Rightarrow E_K = \frac{2m_3 gh}{r_1^2 (2m_3 + m_2 + \frac{2I}{r_1^2})} I \,.$$ **(2 μον.)**

Όταν η ροπή αδράνειας της σφαίρας είναι μηδαμινή η κινητική ενέργεια είναι επίσης μηδαμινή. Όταν η ροπή αδράνειας της σφαίρας παίρνει πολύ μεγάλες τιμές, όλη σχεδόν η δυναμική βαρυτική ενέργεια, $m_3 gh$, μεταβιβάζεται στη σφαίρα, (η ασύμπτωτος στη γραφική παράσταση).
(1 μον.)

Η γραφική παράσταση της $E_K = f(I), I > 0$, είναι της πιο κάτω μορφής.
(2 μον.)



(iii) Από τη γραφική παράσταση είναι φανερό ότι η αύξηση της ροπής αδράνειας της σφαίρας (από συμπαγή σε κούφια), συνεπάγεται αύξηση της κινητικής ενέργειας της σφαίρας. Επομένως η κινητική ενέργεια της κούφιας σφαίρας θα αυξηθεί σε σχέση με την κινητική ενέργεια της συμπαγούς. **(5 μον.)**

<u>Ισοδύναμα</u>: Η μηχανική ενέργεια στο σύστημα διατηρείται. Η μείωση της δυναμικής ενέργειας βαρύτητας του κύβου με την πτώση συνεπάγεται αύξηση της κινητικής ενέργειας του κύβου, της τροχαλίας και της σφαίρας. Με την αύξηση της ροπής αδράνειας της σφαίρας, έχουμε μείωση της ταχύτητας του κύβου και των γωνιακών ταχυτήτων της τροχαλίας και της σφαίρας. Άρα έχουμε μείωση της κινητικής ενέργειας του κύβου και της τροχαλίας. Επομένως, για να διατηρηθεί η μηχανική ενέργεια, θα αυξηθεί η κινητική ενέργεια της κούφιας σφαίρας σε σχέση με τη συμπαγή σφαίρα.

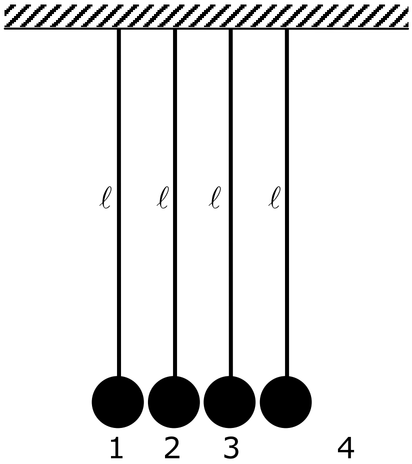
ΘΕΜΑ 2 (20 μονάδες)

(Α) (α) Να εξηγήσετε τι ονομάζουμε Απλό ή Μαθηματικό Εκκρεμές.

(2 μον.)

(β) Να γράψετε τις προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν ώστε η κίνηση ενός εκκρεμούς να μπορεί να θεωρηθεί ως Απλή Αρμονική Ταλάντωση (Α.Α.Τ.) και να αποδείξετε τη σχέση που δίνει την περίοδο του. ***(2 μον.)***

(Β) (α) Ένα «παιχνίδι» αποτελείται από τέσσερεις μεταλλικές σφαίρες ίσων μαζών και μικρών διαστάσεων που κρέμονται από νήματα αμελητέου βάρους, μη εκτατά και μήκους $\ell = 2{,}5\,m$ το κάθε ένα. Οι σφαίρες βρίσκονται **<u>πολύ κοντά</u>** η μια με την άλλη, όπως φαίνεται στο σχήμα και είναι αρχικά ακίνητες. Οι κρούσεις μεταξύ των σφαιρών θεωρούνται ελαστικές με μηδαμινή διάρκεια.



(i), Εκτρέπουμε τη σφαίρα 1 κατά 5^0 (με τεντωμένο το νήμα) και τη χρονική στιγμή t = 0 την αφήνουμε ελεύθερη. Να δείξετε ότι ολόκληρη η ενέργεια της σφαίρας 1 θα μεταδοθεί στη σφαίρα 4. ***(5 μον.)***

(ii) Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες τη θέση x της σφαίρας 1, ως προς το σημείο ισορροπίας, σε συνάρτηση με το χρόνο t, για, 0 ≤ t ≤ 2π s. ***(5 μον.)***

(β) Αφού φέρουμε τις σφαίρες ξανά στην θέση ισορροπίας τους, κολλάμε με μια σταγόνα καλάι (μηδαμινής μάζας) τις σφαίρες 1 και 2. Εκτρέπουμε το συσσωμάτωμα (σφαίρες 1 και 2) πάλι κατά 5^0 και τη χρονική στιγμή t=0 το αφήνουμε ελεύθερο.

(i) Μετά τις διαδοχικές κρούσεις οι μέγιστες **<u>αρχικές εκτροπές</u>** προς τα δεξιά των σφαιρών 4, 3, και του συσσωματώματος, από το σημείο ισορροπίας τους, έστω ότι είναι x_4 , x_3, και $x_{1,2}$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι ισχύει, $\frac{x_4}{x_3} = \frac{3}{1}$ και $\frac{x_3}{x_{1,2}} = \frac{4}{1}$. ***(3 μον.)***

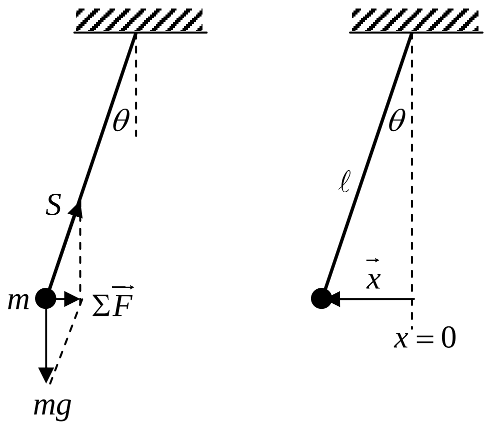
(ii) Να εξηγήσετε εάν, μετά τις διαδοχικές κρούσεις του ερωτήματος (i), θα γίνει ή όχι κρούση της σφαίρας 4 πάνω στη σφαίρα 3. Εάν ναι, σε ποια χρονική στιγμή θα συμβεί αυτό για πρώτη φορά; ***(3 μον.)***

Λύση

(Α) (α) Ένα Απλό ή Μαθηματικό Εκκρεμές αποτελείται από ένα σώμα μάζας m που μπορεί να θεωρηθεί υλικό σημείο (σημειακή μάζα), στο άκρο ενός νήματος μήκους ℓ. Η μάζα του νήματος είναι αμελητέα σε σχέση με τη μάζα του σώματος. Το μήκος του νήματος είναι πολύ μεγαλύτερο από τις διαστάσεις του σώματος. (Το κέντρο μάζας του απλού εκκρεμούς είναι στο σημείο που βρίσκεται το σώμα). Το άκρο του νήματος στηρίζεται σε ακλόνητο σημείο. ***(2 μον.)***

(β) Απαραίτητες προϋποθέσεις ώστε το Απλό Εκκρεμές να εκτελεί Απλή Αρμονική ταλάντωση, είναι:

Η γωνία απόκλισης θ που σχηματίζει το νήμα με την κατακόρυφο να είναι μικρή, ώστε να ισχύει η προσέγγιση: $\varepsilon\varphi\theta \approx \eta\mu\theta = \theta$. (Αποδεκτές τιμές για τη γωνία: $\theta \leq 10^\circ$). ***(1 μον.)***



Από το σχήμα έχουμε: $\Sigma F = mg\eta\mu\theta$, εφόσον $\varepsilon\varphi\theta \approx \eta\mu\theta$ για Α.Α.Τ. Επίσης $\eta\mu\theta = \dfrac{x}{\ell}$. Όπως προκύπτει από το σχήμα η φορά της συνισταμένης δύναμης είναι αντίθετη με τη φορά του διανύσματος θέσης. Άρα,

$\Sigma\vec{F} = -\dfrac{mg}{\ell}\vec{x}$. Η σχέση αυτή ικανοποιεί την απαραίτητη συνθήκη για Α.Α.Τ., $\Sigma\vec{F} = -D\vec{x}$, όπου η σταθερά της ταλάντωσης είναι $D = \dfrac{mg}{\ell}$. Ισχύει: $D = m\omega^2$ και $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Άρα, η περίοδος του απλού εκκρεμούς είναι: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$.

(1 μον.)

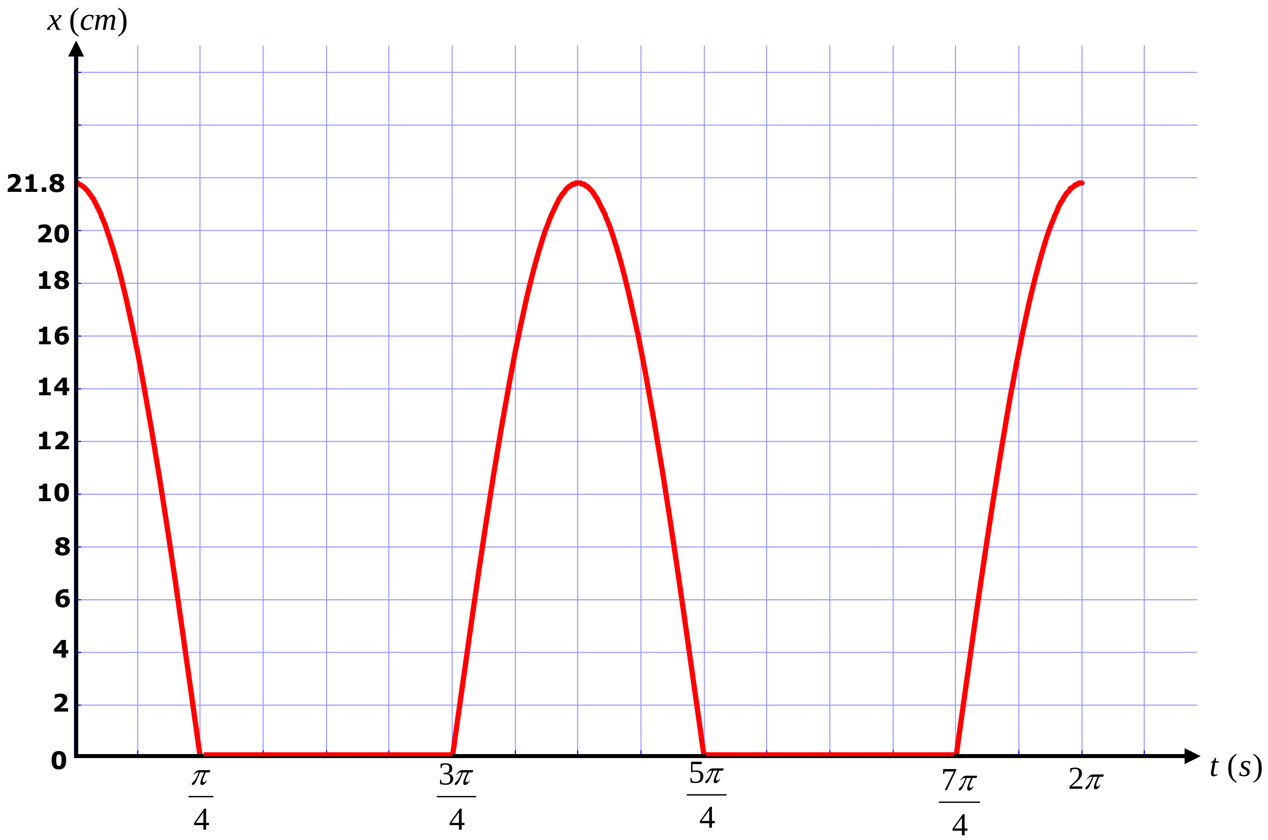
(Β) (α) (i) Από τη διατήρηση της ορμής για δύο σώματα, έχουμε: $m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$. Έστω u_0 το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας 1 με την οποία κτυπά τη σφαίρα 2. Η σχέση αυτή για την κρούση των σφαιρών 1 και 2, δίνει: $mu_0 = mv_1 + mv_2 \Rightarrow u_0 = v_1 + v_2$. Για ελαστικές κρούσεις ισχύει: $\vec{u}_1 + \vec{v}_1 = \vec{u}_2 + \vec{v}_2$. Άρα, $u_0 + v_1 = v_2$. Από τις δύο σχέσεις παίρνουμε:

$u_0 = v_1 + u_0 + v_1 \Rightarrow v_1 = 0$. Άρα, $v_2 = u_0$. Επομένως οι δύο σφαίρες, 1 και 2, ανταλλάσουν ταχύτητες. Μετά την κρούση η σφαίρα 1 ακινητοποιείται και η σφαίρα 2 έχει την ταχύτητα της σφαίρας 1 πριν ην κρούση. Ακολούθως η σφαίρα 2 συγκρούεται με τη σφαίρα 3. Μετά την κρούση οι σφαίρες 2 και 3 ανταλλάσσουν ταχύτητες. Η σφαίρα 2 ακινητοποιείται και η σφαίρα 3 αποκτά ταχύτητα μέτρου u_0. Τέλος η σφαίρα 3 συγκρούεται με τη σφαίρα 4 η οποία αποκτά ταχύτητα μέτρου u_0 και η σφαίρα 3 ακινητοποιείται. Έτσι όλη η κινητική ενέργεια της σφαίρας 1 μεταδίδεται στη σφαίρα 4. ***(5 μον.)***

(ii) Το πλάτος ταλάντωσης είναι: $x_0 = \ell \eta\mu\theta_0 = 2,5\eta\mu(5^0) = 21,8\,cm$.

Η περίοδος είναι $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2,5}{10}} = \pi = 3,14\,s$.

Η εξίσωση της ταλάντωσης είναι, άρα: $x = 21,8\cos(2t)$. (Θεωρήσαμε θετική φορά προς τα αριστερά). Η σφαίρα 1 εκτελεί αρχικά το ¼ της ταλάντωσης, μένει ακίνητη για το επόμενο μισό της ταλάντωσης και τέλος εκτελεί το τελευταίο τέταρτο της ταλάντωσης, για να συμπληρωθεί χρόνος π s. (Η διάρκεια των κρούσεων είναι μηδαμινή). Άρα για 0 ≤ t ≤ 2π s, έχουμε την εξής γραφική παράσταση.



(5 μον.)

<u>Σημ</u>. Επειδή η θετική φορά ορίζεται αυθαίρετα και αφέθηκε στο πρόβλημα να οριστεί από το μαθητή, η γραφική παράσταση είναι επίσης ορθή εάν σχεδιαστεί η πιο πάνω καμπύλη συμμετρικά με τον οριζόντιο άξονα, με αρνητικές τιμές της θέσης. Η εξίσωση της ταλάντωσης σε αυτή την περίπτωση, θα είναι: $x = -21,8\cos(2t)$.

(β) (i) Οι σφαίρες 1 και 2 μαζί έχουν μάζα $2m$. Άρα, από τη διατήρηση της ορμής με την κρούση του συσσωματώματος (σφαίρες 1 και 2) και της σφαίρας 3, έχουμε: $2mu_0 = 2mv_{1,2} + mv_3 \Rightarrow 2u_0 = 2v_{1,2} + v_3$.

Για ελαστικές κρούσεις ισχύει: $u_0 + v_{1,2} = v_3$. Από τις δύο σχέσεις παίρνουμε:

$2u_0 = 2v_{1,2} + u_0 + v_{1,2} \Rightarrow v_{1,2} = \frac{u_0}{3}$. Άρα, $v_3 = u_0 + \frac{u_0}{3} \Rightarrow v_3 = \frac{4}{3}u_0$

Στη συνέχεια η σφαίρα 3 συγκρούεται με την αρχικά ακίνητη σφαίρα 4. Οι δύο σφαίρες έχουν την ίδια μάζα και η κρούση είναι ελαστική. Επομένως ανταλλάσσουν ταχύτητες. Άρα, $v_3' = 0$ και $v_4 = \frac{4}{3}u_0$. Η σφαίρα 3 ακινητοποιείται και συγκρούεται με το συσσωμάτωμα που ακολουθεί με ταχύτητα $v_{1,2}$. Σύμφωνα με την πρώτη κρούση μεταξύ του συσσωματώματος και της σφαίρας 3, θα έχουμε το εξής αποτέλεσμα στη νέα κρούση μεταξύ του συσσωματώματος και της σφαίρας 3:

$v_{1,2}' = \frac{1}{3}(\frac{1}{3}u_0) = \frac{1}{9}u_0$ και $v_3' = \frac{4}{3}(\frac{1}{3}u_0) = \frac{4}{9}u_0$. Οι σφαίρες και το συσσωμάτωμα κινούνται τώρα προς τα δεξιά, στη θέση ισορροπίας, και δεν συμβαίνει άλλη κρούση, πριν επιστρέψουν ξανά στη θέση ισορροπίας.

Οι τιμές των ταχυτήτων στη θέση ισορροπίας είναι μέγιστες και ισχύει, $u_{max} = \omega x_0$, όπου ω είναι η κυκλική συχνότητα, σταθερή για όλες τις σφαίρες, εφόσον η συχνότητα είναι ανεξάρτητη του πλάτους στην Απλή Αρμονική Ταλάντωση και x_0 είναι το πλάτος της ταλάντωσης. Άρα,

$\frac{x_4}{x_3} = \frac{v_4}{v_3'} \Rightarrow \frac{x_4}{x_3} = \frac{\frac{4}{3}u_0}{\frac{4}{9}u_0} = \frac{3}{1}$. Επίσης,

$\frac{x_3}{x_{1,2}} = \frac{v_3'}{v_{1,2}'} \Rightarrow \frac{x_3}{x_{1,2}} = \frac{\frac{4}{9}u_0}{\frac{1}{9}u_0} = \frac{4}{1}$. ***(3 μον.)***

(ii) Η σφαίρα 4 έχει μεγαλύτερη ταχύτητα από τη σφαίρα 3, στη θέση ισορροπίας τους, αμέσως μετά τις πρώτες διαδοχικές κρούσεις. Η περίοδος είναι ανεξάρτητη του πλάτους ταλάντωσης για Α.Α.Τ. Άρα, οι δύο σφαίρες σε χρόνο μισής περιόδου, από την πρώτη μεταξύ τους κρούση, θα συγκρουστούν ξανά εφόσον στη θέση ισορροπίας είναι πολύ κοντά η μια στην άλλη και η σφαίρα 4 θα ακολουθεί με μεγαλύτερη ταχύτητα σε σχέση με την ταχύτητα της σφαίρας 3.

Από τη στιγμή t = 0, που αφήνεται αρχικά το συσσωμάτωμα, μέχρι την πρώτη κρούση μεταξύ των σφαιρών 3 και 4 περνά ένα τέταρτο της περιόδου, εφόσον το συσσωμάτωμα εκτελεί ένα τέταρτο της ταλάντωσης. Άρα, γίνεται ξανά κρούση τη χρονική στιγμή:

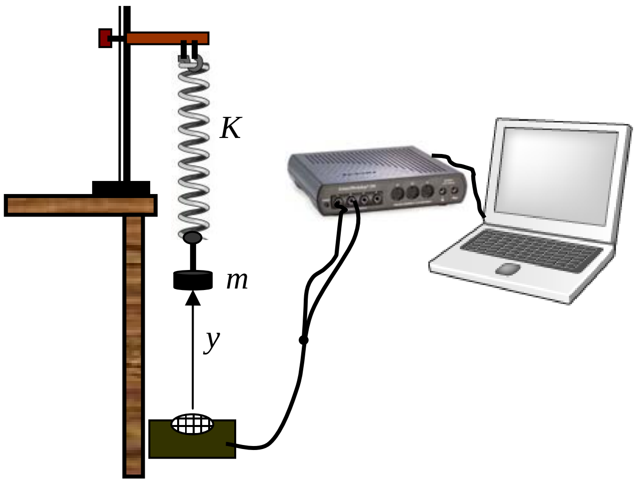
$t = \frac{T}{4} + \frac{T}{2} = \frac{3}{4}T = \frac{3}{4}\pi = 2,36\ s$. ***(3 μον.)***

ΘΕΜΑ 3 (20 μονάδες)

(Α) Να διατυπώσετε την ικανή και αναγκαία συνθήκη που πρέπει να ισχύει ώστε ένα σώμα να εκτελεί Απλή Αρμονική Ταλάντωση (Α.Α.Τ.). ***(2 μον.)***

(Β) Ένα κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς K είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο και στο άλλο άκρο του κρέμεται ένα σώμα μάζας m. Να δείξετε ότι εάν εκτρέψουμε λίγο το σώμα από την θέση ισορροπίας του, θα εκτελεί Α.Α.Τ. ***(3 μον.)***

(Γ) Ένας μαθητής για να μελετήσει την κίνηση ενός σώματος μάζας $m = 0,2\ kg$ το οποίο κρέμεται από το ένα άκρο αβαρούς ελατηρίου, έφτιαξε στο εργαστήριο την πειραματική διάταξη που φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



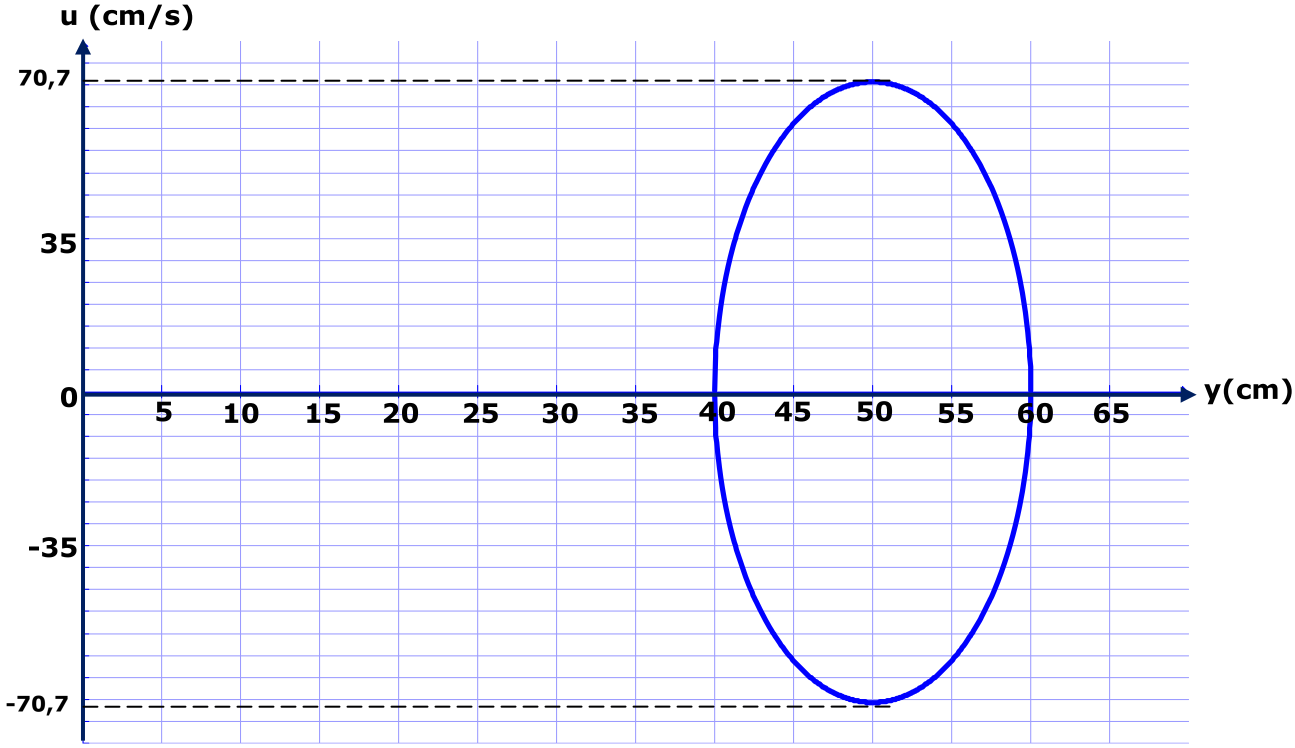
Ο μαθητής αφού έκανε τις απαραίτητες ρυθμίσεις στον αισθητήρα κίνησης, στην διασύνδεση και στον υπολογιστή, έθεσε σε κατακόρυφη ταλάντωση το σώμα και τη χρονική στιγμή t=0, όταν το σώμα βρισκόταν στο ανώτατο σημείο της τροχιάς του, έθεσε σε λειτουργία τον αισθητήρα, ο οποίος άρχισε να λαμβάνει μετρήσεις. Μετά την επεξεργασία των μετρήσεων, ο μαθητής πήρε στην οθόνη του υπολογιστή, την γραφική παράσταση της ταχύτητας, u, του σώματος σε συνάρτηση της θέσης του, y, (από τον αισθητήρα), όπως φαίνεται στο πιο κάτω διάγραμμα.

(α) Να υπολογίσετε τη σταθερά του ελατηρίου, με ακρίβεια 2 σημαντικών ψηφίων. ***(3 μον.)***

(β) Να γράψετε την εξίσωση της ταχύτητας u σε σχέση με την θέση y. ***(2 μον.)***

(γ) Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες τη γραφική παράσταση της θέσης y του σώματος, σε συνάρτηση με το χρόνο t, y = f(t), για 0 ≤ t ≤ 1,78 s. ***(5 μον.)***

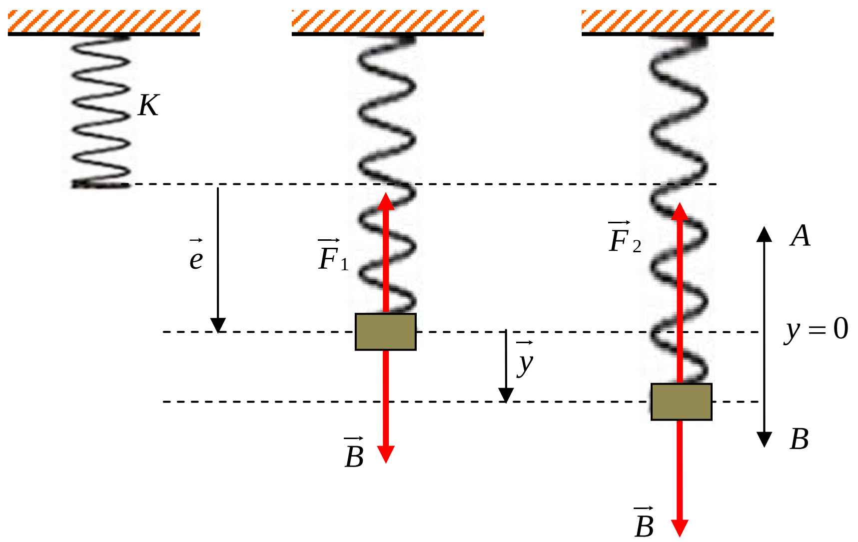
(δ) Να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή που το σώμα θα έχει για πρώτη φορά από τον αισθητήρα ύψος 45 cm. Να υπολογίσετε τη χρονική διάρκεια στο διάστημα 0 ≤ t ≤ 1,78 s, για την οποία το σώμα θα απέχει από τον αισθητήρα μικρότερη απόσταση από 45 cm. ***(5 μον.)***



Λύση

(Α) Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να εκτελεί ένα σώμα Α.Α.Τ. δίνεται από τη σχέση: $\Sigma\vec{F} = -D\vec{y}$. Δηλαδή η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα πρέπει να είναι αντίθετη του διανύσματος θέσης και το μέτρο της να είναι ανάλογο του μέτρου του διανύσματος θέσης. ***(2 μον.)***

(Β) Το σχήμα δείχνει με τη σειρά το ελατήριο ελεύθερο χωρίς βάρος, τη θέση στην οποία το σώμα ισορροπεί και μια τυχαία θέση καθώς το σώμα εκτελεί ταλάντωση μεταξύ των ακραίων θέσεων A και B. Στη θέση ισορροπίας: $\vec{F}_1 = -\vec{B}$. Από το νόμο του Hooke: $\vec{F}_1 = -K\vec{e}$. Άρα, $\vec{B} = K\vec{e}$. Η συνισταμένη δύναμη όταν το σώμα εκτελεί ταλάντωση είναι: $\Sigma\vec{F} = \vec{B} + \vec{F}_2$. Από το νόμο του Hooke: $\vec{F}_2 = -K(\vec{e} + \vec{y})$. Άρα, $\Sigma\vec{F} = \vec{B} - K(\vec{e} + \vec{y})$. Επομένως, $\Sigma\vec{F} = -K\vec{y}$. Η σχέση αυτή ικανοποιεί την αναγκαία συνθήκη για Α.Α.Τ.



(3 μον.)

(Γ) (α) Είναι: $K = m\omega^2$. Από τη γραφική παράσταση της ταχύτητας με τη θέση, βρίσκουμε: $y_0 = 0{,}10\, m$ και $u_0 = 0{,}707\, m/s$. Είναι:

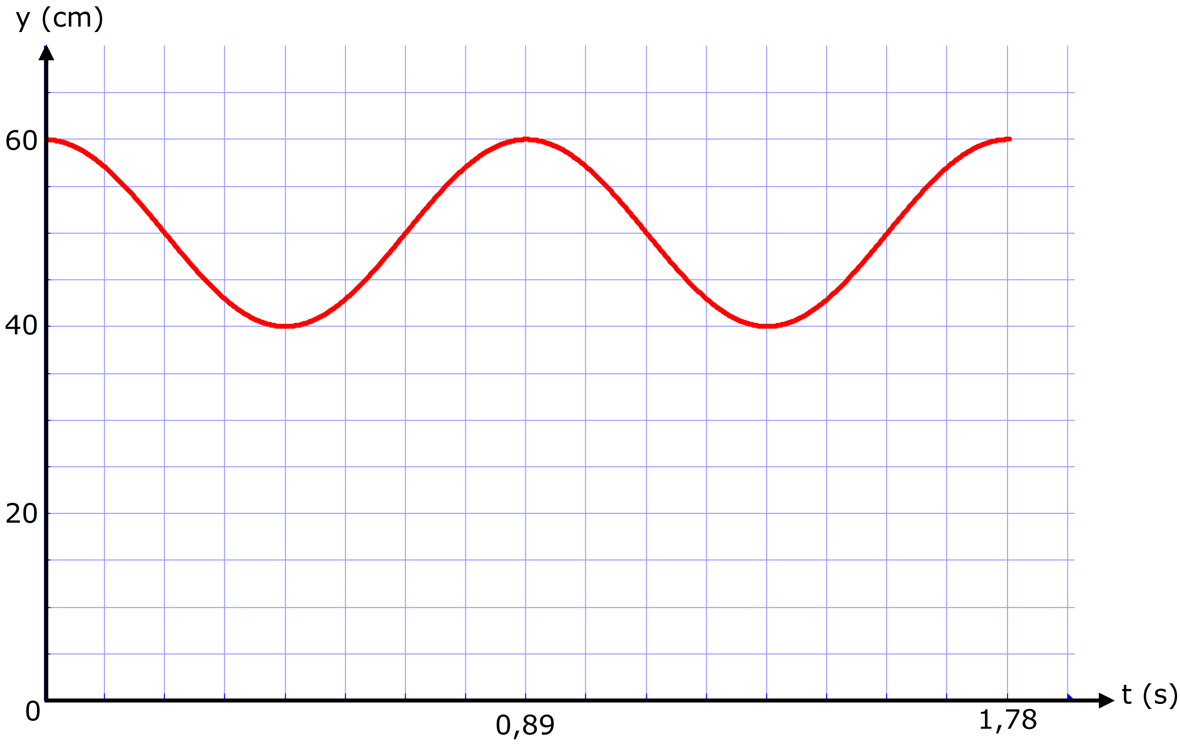
$u_0 = \omega y_0 \Rightarrow \omega = \dfrac{u_0}{y_0} \Rightarrow \omega = \dfrac{0{,}707}{0{,}10} = 7{,}07\, rad/s$. Άρα,

$K = m\omega^2 \Rightarrow K = 0{,}2(7{,}07)^2 = 10\, N/m$. ***(3 μον.)***

(β) Είναι: $u = \pm\omega\sqrt{y_0^2 - (y-d)^2}$, όπου d είναι η απόσταση της θέσης ισορροπίας (κέντρο της ταλάντωσης) από τη θέση $y = 0$. Αντικαθιστούμε:

$u = \pm 7{,}07\sqrt{0{,}10^2 - (y-0{,}50)^2}$, μονάδες στο S.I. ***(2 μον.)***

(γ) Η περίοδος της ταλάντωσης είναι: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \dfrac{2x3{,}14}{7{,}07} = 0.89\, s$. Άρα στο διάστημα 0 ≤ t ≤ 1,78 s, το σώμα εκτελεί 2 πλήρης ταλαντώσεις.



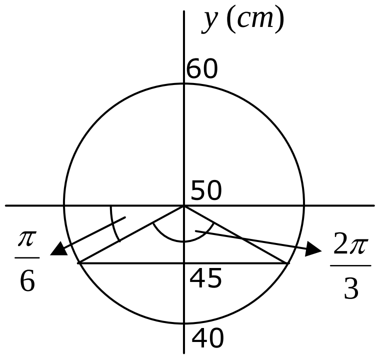
(5 μον.)

(δ) Το σώμα τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, βρίσκεται 60 cm από τον αισθητήρα. Έστω τη χρονική στιγμή t_1, θα βρίσκεται για πρώτη φορά 40 cm από τον αισθητήρα. Από τον τριγωνομετρικό κύκλο έχουμε:

$\omega(\Delta t) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow \Delta t = \dfrac{\frac{2\pi}{3}}{\omega} \Rightarrow \Delta t = \dfrac{\frac{6{,}28}{3}}{7{,}07} = 0{,}296 \approx 0{,}30\, s$. Άρα, $t_1 = 0{,}30\, s$.

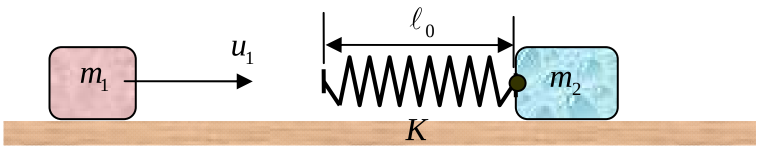
(2 μον.)

Η χρονική διάρκεια στο διάστημα 0 ≤ t ≤ 1,78 s για την οποία το σώμα απέχει από τον αισθητήρα μικρότερη απόσταση από 45 cm, είναι ο διπλάσιος χρόνος που χρειάζεται το σώμα να κινηθεί από το Α στο Β, με την μικρότερη γωνία, στον τριγωνομετρικό κύκλο. Άρα,
$\Delta t_{ολ} = 2\Delta t = 2(0,30) = 0,60\ s$. ***(3 μον.)***



ΘΕΜΑ 4 (20 μονάδες)

Ένα σώμα μάζας $m_1 = 0,1\,kg$ κινείται σε οριζόντια λεία επιφάνεια (που δεν παρουσιάζει τριβές) με ταχύτητα μέτρου $u_1 = 10\,m/s$. Ένα δεύτερο σώμα μάζας $m_2 = 0,4\,kg$ είναι αρχικά ακίνητο και φέρει αβαρές ελατήριο σταθεράς $K = 800\,N/m$ και φυσικού μήκους $\ell_0 = 0,25\,m$. Σε κάποια στιγμή το πρώτο σώμα συγκρούεται με το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου.



(α) Να περιγράψετε ποιοτικά την κίνηση των σωμάτων μετά την επαφή του πρώτου σώματος με το ελατήριο. ***(2 μον.)***

(β) (i) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος, πριν το πρώτο σώμα έρθει σε επαφή με το ελατήριο. ***(2 μον.)***

(ii) Να εξηγήσετε κατά πόσο η ταχύτητα αυτή του κέντρου μάζας παραμένει σταθερή σε όλη τη διάρκεια που το πρώτο σώμα συμπιέζει το ελατήριο. ***(2 μον.)***

(γ) Να υπολογίσετε τη μικρότερη μεταξύ τους απόσταση που θα φτάσουν τα δύο σώματα. ***(4 μον.)***

(δ) Να υπολογίσετε τις ταχύτητες των σωμάτων όταν θα αποχωριστεί το πρώτο σώμα από το ελατήριο. ***(4 μον.)***

(ε) (i) Να δείξετε ότι ένας παρατηρητής στη θέση του κέντρου μάζας του συστήματος θα δει τα σώματα μαζών m_1 και m_2 να εκτελούν Α.Α.Τ. της ίδιας περιόδου. ***(3 μον.)***

(ii) Να εξηγήσετε για πόσο χρόνο θα βλέπει να συμβαίνει αυτό. ***(3 μον.)***

Λύση

(α) Μετά την επαφή του πρώτου σώματος με το ελατήριο το μέτρο της ταχύτητάς του θα ελαττώνεται αρχικά (όχι με σταθερό ρυθμό). Σε κάποια στιγμή μηδενίζεται η ταχύτητά του και αμέσως μετά αλλάζει φορά κίνησης. Ακολούθως το μέτρο της ταχύτητάς του αυξάνεται (όχι με σταθερό ρυθμό) μέχρι τη στιγμή που θα χάσει επαφή με το ελατήριο, οπότε θα κινείται μετά με σταθερή ταχύτητα, προς τα αριστερά.
Το δεύτερο σώματος, μετά την επαφή του πρώτου σώματος με το ελατήριο, θα αρχίσει να κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα που θα αυξάνεται συνεχώς (όχι με σταθερό ρυθμό), μέχρι τη στιγμή που το πρώτο σώμα χάσει επαφή με το ελατήριο, οπότε θα κινείται πλέον με σταθερή ταχύτητα. ***(2 μον.)***

(β) (i) Η ορμή του συστήματος είναι: $p = m_{ολ} v_{κ.μ.}$. Άρα,

$$v_{κ.μ.} = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow v_{κ.μ.} = \frac{0,1x10}{0,1+0,4} = \frac{1}{0,5} = 2\ m/s.$$ ***(2 μον.)***

(ii) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος μένει σταθερή σε όλη τη διάρκεια της κίνησης, εφόσον διατηρείται η ορμή του συστήματος (η συνισταμένη δύναμη στο σύστημα είναι μηδέν). ***(2 μον.)***

(γ) Η μικρότερη μεταξύ τους απόσταση που θα φτάσουν τα δύο σώματα, υπολογίζεται από τη μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου, εάν αφαιρεθεί από το φυσικό του μήκος.
Χρησιμοποιούμε την αρχή διατήρησης της ορμής, εφόσον οι δυνάμεις στο σύστημα είναι εσωτερικές,

$$m_1 \vec{\upsilon}_1 + m_2 \vec{\upsilon}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

Αντικαθιστούμε,

$$0,1x10 = 0,1v_1 + 0,4v_2 \Rightarrow 1 = 0,1v_1 + 0,4v_2 \Rightarrow 10 = v_1 + 4v_2$$

Από την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, έχουμε

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}K(\Delta x)^2.$$ Αντικαθιστούμε,

$$0,1x100 = 0,1v_1^2 + 0,4v_2^2 + 800(\Delta x)^2$$

$$\Rightarrow 100 = v_1^2 + 4v_2^2 + 8000(\Delta x)^2$$

Στην μικρότερη απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων τα δύο σώματα θα έχουν στιγμιαία την ίδια ταχύτητα, έστω v_K, Άρα $v_1 = v_2 = v_k$. Επομένως από τη διατήρηση της ορμής έχουμε:
$10 = v_1 + 4v_2 \Rightarrow 10 = 5v_K \Rightarrow v_K = 2\ m/s$. Άρα, από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας: $100 = v_1^2 + 4v_2^2 + 8000(\Delta x)^2 \Rightarrow 100 = 5v_k^2 + 8000(\Delta x_{\max})^2$, όπου $\Delta x_{\max}$ είναι η μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου. Άρα,

$$100 = 20 + 8000(\Delta x_{\max})^2 \Rightarrow \Delta x_{\max} = \sqrt{\frac{80}{8000}} = 0,10\ m.$$

Επομένως η μικρότερη απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων είναι: $d_{\min} = \ell_0 - \Delta x_{\max} \Rightarrow d_{\min} = 0,25 - 0,10 = 0,15\ m$. ***(4 μον.)***

(δ) Όταν θα αποχωριστεί το πρώτο σώμα από το ελατήριο, θα έχουμε $\Delta x = 0$. Άρα, από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, παίρνουμε:
$100 = v_1^2 + 4v_2^2 + 8000(\Delta x)^2 \Rightarrow 100 = v_1^2 + 4v_2^2$. Από τη διατήρηση της ορμής, η σχέση αυτή δίνει: $100 = v_1^2 + 4v_2^2 \Rightarrow 100 = (10 - 4v_2)^2 + 4v_2^2$

$\Rightarrow 100 = (10-4v_2)^2 + 4v_2^2 \Rightarrow 100 = 100 - 80v_2 + 20v_2^2$

$\Rightarrow 80v_2 = 20v_2^2 \Rightarrow v_2 = 0$ ή $v_2 = 4\, m/s$

Αντίστοιχα:

$v_1 = 10 - 4v_2 \Rightarrow v_1 = 10\, m/s$ ή $v_1 = -6\, m/s$.

Το ζεύγος τιμών $v_2 = 0$ και $v_1 = 10\, m/s$ ικανοποιεί την κατάσταση πριν την επαφή του πρώτου σώματος με το ελατηρίου, άρα απορρίπτεται. Επομένως οι ταχύτητες των σωμάτων όταν το πρώτο σώμα αποχωρίζεται το ελατήριο είναι: $v_2 = 4\, m/s$ και $v_1 = -6\, m/s$. ***(4 μον.)***

(ε) (i) Στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας, το κέντρο μάζας είναι ακίνητο. Τα δύο σώματα ταλαντώνονται γύρω από το κέντρο μάζας. Η ταλάντωση είναι Απλή Αρμονική, εφόσον τα σώματα δέχονται δυνάμεις που σύμφωνα με το νόμο του Hooke, ικανοποιούν την αναγκαία συνθήκη για Α.Α.Τ.

Το κάθε σώμα θεωρείται να συνδέεται με ελατήριο σταθεράς K_1 και K_2, μήκους ℓ_1 και $\ell_2 = \ell_0 - \ell_1$ αντίστοιχα, όπου ℓ_1 είναι η απόσταση του κέντρου μάζας από το πρώτο σώμα. Είναι, από τη σχέση του κέντρου μάζας: $\ell_1 = \dfrac{m_2 \ell_0}{m_1 + m_2}$ και $\ell_2 = \dfrac{m_1 \ell_0}{m_1 + m_2}$. Η σταθερά ενός ελατηρίου είναι αντιστρόφως ανάλογη του μήκους του. Άρα, $K_1 \ell_1 = K_2 \ell_2 = K \ell_0$. Επομένως: $K_1 = \dfrac{K(m_1+m_2)}{m_2}$ και $K_2 = \dfrac{K(m_1+m_2)}{m_1}$. Η περίοδος ταλάντωσης των σωμάτων είναι: $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1}{K_1}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1 m_2}{K(m_1+m_2)}}$ και

$T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_2}{K_2}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1 m_2}{K(m_1+m_2)}}$. Άρα $T_2 = T_1$. ***(3 μον.)***

<u>Ισοδύναμα:</u> Ως προς τον παρατηρητή στο κέντρο μάζας το οποίο μένει ακίνητο, το πρώτο σώμα μάζας m_1 κινείται προς τα δεξιά και σε τυχαία στιγμή το ελατήριο σταθεράς K_1 συμπιέζεται κατά x_1. Το σώμα μάζας m_2 κινείται προς τα αριστερά, ως προς το κέντρο μάζας, και την ίδια στιγμή συμπιέζει το ελατήριο κατά x_2. Η ορμή διατηρείται και άρα η συνισταμένη δύναμη είναι μηδέν. Άρα,: $K_1 x_1 = K_2 x_2$. Το κέντρο μάζας ως προς τον παρατηρητή που βρίσκεται σε αυτό είναι ακίνητο. Άρα, ισχύει: $m_2 \ell_0 = m_1 x_1 + m_2(\ell_0 - x_2)$. Οι δύο τελευταίες σχέσεις δίνουν: $\dfrac{m_1}{K_1} = \dfrac{m_2}{K_2}$.

Η περίοδος του κάθε σώματος είναι: $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1}{K_1}}$ και $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_2}{K_2}}$. Άρα, $T_2 = T_1$.

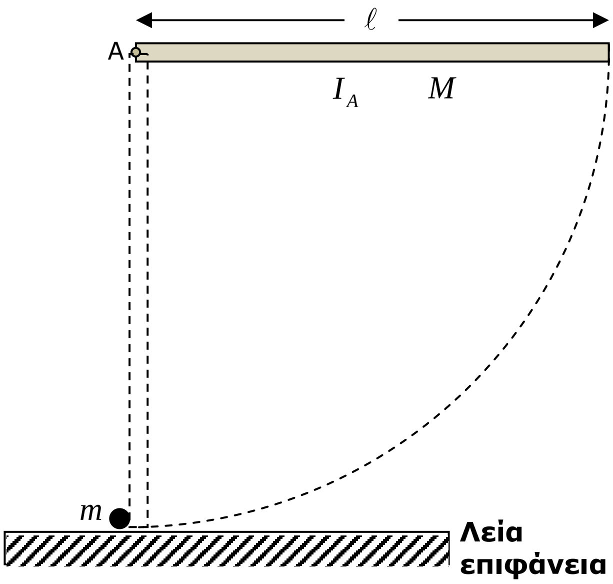
(ii) Ο παρατηρητής βλέπει τα σώματα να εκτελούν Α.Α.Τ.. Αρχικά, όταν το πρώτο σώμα έρχεται σε επαφή με το ελατήριο, το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας. Όταν χάνει επαφή με το ελατήριο κινείται αντίθετα και το σώμα περνά και πάλι από τη θέση ισορροπίας. Οι ταχύτητες ως προς το κέντρο μάζες είναι ίσες και αντίθετες. Άρα, ο παρατηρητής βλέπει τα σώματα να εκτελούν Α.Α.Τ. για χρόνο ίσο με το ½ της περιόδου. Άρα,

$$t_{\min} = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{K(m_1+m_2)}} = \pi\sqrt{\frac{0,04}{800(0,5)}} = 0,01\pi\ s = 0,031\,s\ .$$

ΘΕΜΑ 5 (20 μονάδες)

(Α) (α) Να διατυπώσετε την αρχή διατήρησης της στροφορμής. ***(2 μον.)***
(β) Να αναφέρετε ένα παράδειγμα όπου ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής και ένα παράδειγμα που δεν ισχύει η αρχή αυτή. ***(2 μον.)***

(Β) Η ομογενής ράβδος στο σχήμα έχει μάζα $M = 0,3\,kg$, μήκος $\ell = 2\,m$ και ροπή αδράνειας ως προς το άκρο Α, $I_A = \frac{1}{3}M\ell^2$. Η ράβδος κρατείται αρχικά σε ηρεμία σε οριζόντια θέση και αφήνεται να περιστραφεί ως προς το άκρο Α, χωρίς τριβές.



(α) Να δείξετε ότι το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου, όταν αυτή περνά από την κατακόρυφη θέση, είναι $\omega_1 = \sqrt{15}\ rad/s$. ***(3 μον.)***
(β) Τη στιγμή που η ράβδος περνά από την κατακόρυφη θέση συγκρούεται με σώμα αμελητέων διαστάσεων μάζας $m = 0,2\,kg$ το οποίο είναι αρχικά ακίνητο. Το σώμα προσκολλάται στη ράβδο στο άκρο Β, όπως δείχνει το σχήμα.
Να δείξετε ότι το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου αμέσως μετά την πλαστική κρούση, είναι $\omega_2 = \frac{\sqrt{15}}{3}\ rad/s$. ***(5 μον.)***
(γ) Να υπολογίσετε τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας λόγω της κρούσης. Που οφείλεται η μεταβολή αυτή; ***(3 μον.)***
(δ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη γωνία που αποκλίνει η ράβδος μετά την κρούση. ***(5 μον.)***

Λύση

(Β) (α) Από το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, έχουμε:

$Mgh = \frac{1}{2}I\omega_1^2 \Rightarrow Mg\frac{\ell}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{3}M\ell^2\omega_1^2 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}$. Αντικαθιστούμε,

$\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{\ell}} = \sqrt{\frac{3x10}{2}} = \sqrt{15}\ rad/s$. ***(3 μον.)***

(β) Έχουμε διατήρηση της στροφορμής, λίγο πριν και αμέσως μετά την κρούση, εφόσον η συνισταμένη ροπή, ως προς το Α, είναι μηδέν. Άρα,

$L_\pi = L_\mu \Rightarrow I\omega_1 = (I + m\ell^2)\omega_2 \Rightarrow \frac{1}{3}M\ell^2\omega_1 = (\frac{1}{3}M\ell^2 + m\ell^2)\omega_2$. $\Rightarrow \omega_2 = \frac{M}{M+3m}\omega_1$.

Αντικαθιστούμε: $\Rightarrow \omega_2 = \frac{0,3}{0,3+3x0,2}\sqrt{15} \Rightarrow \omega_2 = \frac{\sqrt{15}}{3}$. ***(5 μον.)***

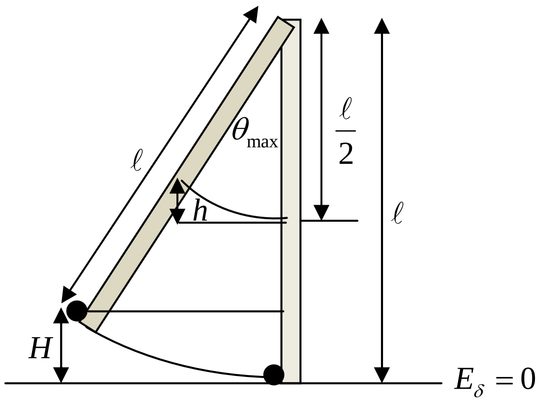
(γ) Είναι: $\Delta E = \frac{1}{2}(I+m\ell^2)\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 \Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2}(0,4+0,8)\frac{15}{9} - \frac{1}{2}(0,4)(15)$

$\Rightarrow \Delta E = 1 - 3 = -2\ J$. ***(2 μον.)***

Η μεταβολή (μείωση της κινητικής ενέργειας) οφείλεται σε μετατροπή μέρους της αρχικής κινητικής ενέργειας της ράβδου σε άλλες μορφές ενέργειας, κυρίως σε θερμική, δυναμική ενέργεια για την παραμόρφωση του σώματος και ηχητική. ***(1 μον.)***

(δ) Μετά την κρούση διατηρείται η μηχανική ενέργεια:

$\frac{1}{2}(I+m\ell^2)\omega_2^2 + Mg\frac{\ell}{2} = mgH + Mg(h+\frac{\ell}{2})$.



$H = \ell - \ell\sigma\upsilon\nu\theta_{max}$, $h = \frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\theta_{max}$. Άρα,

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{3}M\ell^2 + m\ell^2)\omega_2^2 = mg(\ell - \ell\sigma\upsilon\nu\theta_{max}) + Mg(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\theta_{max})$$

$$(\frac{1}{3}M\ell^2 + m\ell^2)\omega_2^2 = 2\ell mg(1-\sigma\upsilon\nu\theta_{max}) + Mg\ell(1-\sigma\upsilon\nu\theta_{max})$$

$$(M+3m)\omega_2^2\ell = 6mg(1-\sigma\upsilon\nu\theta_{max}) + 3Mg(1-\sigma\upsilon\nu\theta_{max})$$

$$(M+3m)\omega_2^2\ell = 3g(1-\sigma\upsilon\nu\theta_{max})(2m+M)$$

$$1-\sigma\upsilon\nu\theta_{max} = \frac{(M+3m)\omega_2^2\ell}{3g(2m+M)}$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta_{\max} = 1 - \frac{(M+3m)\omega_2^2\ell}{3g(2m+M)}$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta_{\max} = 1 - \frac{(0,3+3x0,2)\dfrac{15}{9}x2}{3x10(2x0,2+0,3)}$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta_{\max} = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7} \Rightarrow \theta_{\max} = 31,0^\circ .$$ ***(5 μον.)***