ΕΝΩΣΗ ΚΥΠΡΙΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ

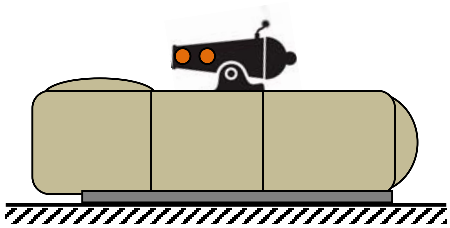
25^{Η} ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ (Πρώτη Φάση)

Κυριακή, 16 Ιανουαρίου, 2011

Προτεινόμενες Λύσεις

Πρόβλημα - 1 (10 μονάδες)

Ένα όχημα, μαζί με ένα κανόνι που είναι ακλόνητο πάνω σε αυτό, έχουν συνολική μάζα M και σε αυτό υπάρχουν δύο σφαίρες με μάζα m η καθεμιά. Αρχικά το σύστημα (όχημα, κανόνι και σφαίρες) είναι ακίνητο, ως προς το έδαφος. Θεωρήστε ότι μεταξύ του οχήματος και της οριζόντιας επιφάνειας πάνω στην οποία βρίσκεται δεν υπάρχουν τριβές.



Από το κανόνι οι σφαίρες εκτοξεύονται οριζόντια προς τα αριστερά και με ταχύτητα μέτρου u_0, ως προς το όχημα.

(α) Να εξάγετε τη σχέση που δίνει το μέτρο της ταχύτητας που αποκτά το όχημα, ως προς το έδαφος, ως συνάρτηση των μεγεθών M, m και u_0, στις εξής δύο περιπτώσεις:

(i) Οι σφαίρες εκτοξεύονται και οι δύο ταυτόχρονα.

(ii) Οι σφαίρες εκτοξεύονται μια-μια, δηλαδή η μια μετά την άλλη.

(β) Να καταλήξετε σε ένα συμπέρασμα κατά πόσο το όχημα αποκτά και στις δύο περιπτώσεις την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα ή μεγαλύτερη σε μέτρο ταχύτητα είτε στην πρώτη είτε στη δεύτερη περίπτωση. Δικαιολογήστε.

Λύση

(α) (i) Στην περίπτωση που οι δύο σφαίρες εκτοξεύονται από το κανόνι ταυτόχρονα, μπορούμε να θεωρήσουμε μια εκτόξευση ενός σώματος με μάζα $2m$. Η διατήρηση της ορμής δίνει, $\vec{p}_{\pi} = \vec{p}_{\mu} \Rightarrow \vec{o} = M\vec{v} + 2m\vec{u}$. Οι ταχύτητες των σωμάτων στη σχέση διατήρησης της ορμής είναι ως προς το έδαφος. Θεωρούμε τη φορά δεξιά θετική. Άρα, $0 = Mv - 2mu$.

Η ταχύτητα των σφαιρών που εκτοξεύονται είναι ως προς το όχημα. Τη στιγμή που το μέτρο της ταχύτητα των σφαιρών, ως προς το όχημα, είναι u_0, την ίδια στιγμή το όχημα κινείται αντίθετα με ταχύτητα μέτρου v. Άρα, για έναν ακίνητο παρατηρητή στο έδαφος, οι σφαίρες θα κινούνται με ταχύτητα μέτρου $u = u_0 - v$. Άρα, η διατήρηση της ορμής γράφεται: $0 = Mv - 2m(u_0 - v) \Rightarrow 2mu_0 = v(2m + M)$. Τελικά, το όχημα αποκτά, ως προς το έδαφος ταχύτητα μέτρου: $v = \dfrac{2mu_0}{2m + M}$.

(3 μον.)

<u>Σημ.</u> Η σχέση $Mv = 2mu_0$**, δεν είναι ορθή.**

(α) (ii) Στην περίπτωση που οι σφαίρες εκτοξεύονται η μια μετά την άλλη, εφαρμόζουμε τη διατήρηση της ορμής σε κάθε εκτόξευση. Μετά την εκτόξευση της πρώτης σφαίρας μάζας m αυτή θα έχει ταχύτητα μέτρου u_1 ως προς το έδαφος και το όχημα, μάζας M, μαζί με τη δεύτερη σφαίρα μάζας m θα αποκτήσουν ταχύτητα μέτρου v_1 ως προς το έδαφος. Θεωρούμε τη φορά δεξιά θετική. Από την αρχή διατήρησης της ορμής, έχουμε τη σχέση: $0 = (m + M)v_1 - mu_1 \Rightarrow mu_1 = (m + M)v_1$.

Το μέτρο της ταχύτητας u_0 ως προς το όχημα σε σχέση με το μέτρο της ταχύτητας u_1 ως προς το έδαφος συνδέονται, όπως αναφέραμε και πριν, με τη σχέση $u_1 = u_0 - v_1$. Επομένως η διατήρηση της ορμής για την πρώτη εκτόξευση, δίνει

$$m(u_0 - v_1) = (m + M)v_1 \Rightarrow mu_0 = (2m + M)v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{mu_0}{2m + M}.$$

<u>Σημ.</u> Η σχέση $(M + m)v_1 = mu_0$**, για την πρώτη εκτόξευση, δεν είναι ορθή.**

<u>Σημ.</u> Η σχέση $(M + m)v_1 = Mv_2 - mu_0$**, για τη δεύτερη εκτόξευση, δεν είναι ορθή.**

Μετά τη εκτόξευση της δεύτερης σφαίρας, μάζας m, με ταχύτητα μέτρου u_0 ως προς το όχημα (όπως συμβαίνει με κάθε εκτόξευση !!), η σφαίρα θα έχει τώρα ταχύτητα μέτρου u_2 ως προς το έδαφος. Μετά την εκτόξευση της δεύτερης σφαίρας το όχημα, μάζας M, θα αποκτήσει ταχύτητα μέτρου v_2 ως προς το έδαφος. Έχουμε λοιπόν τη σχέση, $u_2 = u_0 - v_2$. Από την αρχή διατήρησης της ορμής, έχουμε τη σχέση:

$(M+m)v_1 = Mv_2 - mu_2$. Όπου, $u_2 = u_0 - v_2$. Άρα,

$$(m+M)v_1 = Mv_2 - m(u_0 - v_2) \Rightarrow (m+M)v_1 = (m+M)v_2 - mu_0 .$$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{(m+M)v_1 + mu_0}{m+M} \Rightarrow v_2 = v_1 + \frac{m}{m+M}u_0 .$$

Αντικαθιστούμε τη σχέση που δίνει την v_1, παίρνουμε,

$$v_2 = \frac{m}{2m+M}u_0 + \frac{m}{m+M}u_0 \Rightarrow v_2 = \frac{mu_0(3m+2M)}{(2m+M)(m+M)} .$$

(5 μον.)

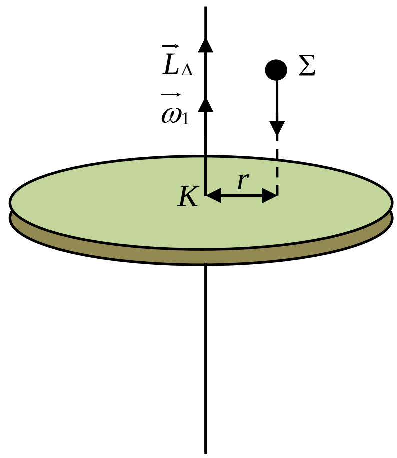
(β) Εάν δούμε τα δύο αποτελέσματα για τις ταχύτητες v και v_2 που αποκτά το όχημα για την εκτόξευση των σφαιρών ταυτόχρονα και για την εκτόξευση τν σφαιρών μια – μια, αντίστοιχα, παρατηρούμε ότι μπορούμε να γράψουμε τη σχέση (αντικαθιστούμε τη μια σχέση στην άλλη).

$v_2 = \dfrac{3m+2M}{2m+2M}v$. Άρα, είναι προφανές από τη σχέση αυτή ότι $v_2 > v$. Δηλαδή το όχημα αποκτά μεγαλύτερη κατά μέτρο ταχύτητα όταν οι σφαίρες εκτοξεύονται η μια μετά την άλλη και όχι όταν εκτοξεύονται και οι δύο ταυτόχρονα.

(2 μον.)

Πρόβλημα - 2 (10 μονάδες)

Στο σχήμα ο δίσκος περιστρέφεται σε σταθερό οριζόντιο επίπεδο, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, $\vec{\omega}_1$, γύρω από το σταθερό κατακόρυφο άξονα συμμετρίας του. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα συμμετρίας του είναι I. Η στροφορμή και η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου είναι κατά μήκος του άξονα περιστροφής, όπως δείχνει το σχήμα. Το σχήμα δείχνει επίσης την κατακόρυφη κίνηση προς τα κάτω ενός υλικού σημείου Σ από πλαστελίνη, μάζας m. Τη στιγμή της πλαστικής κρούσης το υλικό σημείο απέχει από το κέντρο K του δίσκου απόσταση r. Το υλικό σημείο μαζί με το δίσκο, μετά την κρούση, αποκτούν κοινή γωνιακή ταχύτητα, μέτρου ω_κ.



Να εξηγήσετε αν:

(α) Το υλικό σημείο Σ (όταν κινείται κατακόρυφα), έχει στροφορμή ή όχι, ως προς το κέντρο του δίσκου, πριν την κρούση με το δίσκο. Αν ναι, να αναφέρετε τη διεύθυνση πάνω στην οποία βρίσκεται το διάνυσμα της στροφορμής αυτής.

(β) Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου μετά την κρούση, $\vec{\omega}_\kappa$, μειώνεται, αυξάνεται ή διατηρείται η ίδια σε σχέση με τη γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}_1$ που είχε ο δίσκος πριν την κρούση.

(γ) Η κινητική ενέργεια του δίσκου, λόγω της κρούσης με το υλικό σημείο, μειώνεται, αυξάνεται ή διατηρείται η ίδια.

Λύση

(α) Το υλικό σημείο Σ έχει στροφορμή ως προς το κέντρο του δίσκου. Η στροφορμή είναι διανυσματικό μέγεθος που έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν το διάνυσμα της ορμής και το διάνυσμα της θέσης, ως προς κάποιο σημείο αναφοράς. Η στροφορμή είναι μηδέν μόνο αν το σημείο αναφοράς βρίσκεται στη διεύθυνση της ορμής ή όταν η ορμή είναι μηδέν. Στην περίπτωση του προβλήματος, αυτό δεν ισχύει. Άρα το υλικό σημείο Σ, κατά την κατακόρυφη κίνηση προς τα κάτω, έχει στροφορμή ως προς το κέντρο του δίσκου.

Το επίπεδο που ορίζουν το διάνυσμα της ορμής και το διάνυσμα της θέσης ως προς το κέντρο του δίσκου, καθώς το υλικό σημείο κινείται κατακόρυφα, είναι, στην περίπτωση αυτή, κατακόρυφο. Άρα η στροφορμή του υλικού σημείου, ως προς το κέντρο του δίσκου, είναι οριζόντια, δηλαδή είναι κάθετη στη διεύθυνση του άξονα περιστροφής του δίσκου.

(4 μον.)

(β) Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου μειώνεται. Μπορούμε να εξηγήσουμε τη μείωση της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου ως εξής:

Α΄ Τρόπος:

Η στροφορμή του συστήματος (δίσκος και υλικό σημείο) κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα περιστροφής διατηρείται, πριν και μετά την κρούση, επειδή η συνισταμένη ροπή δύναμης για το σύστημα είναι μηδέν. (Κατά την κρούση οι ροπές των δυνάμεων είναι εσωτερικές). Πριν την κρούση κατά μήκος του άξονα περιστροφής, η στροφορμή του συστήματος είναι μόνο αυτή του δίσκου. Μετά την κρούση, το υλικό σημείο αποκτά στροφορμή η οποία είναι στην ίδια διεύθυνση και φορά με την αρχική στροφορμή του δίσκου. Άρα, για να διατηρηθεί σταθερή η στροφορμή του συστήματος κατά μήκος του άξονα περιστροφής, ελαττώνεται η στροφορμή του δίσκου. Η στροφορμή του δίσκου δίνεται από τη σχέση $\vec{L} = I\vec{\omega}$. Εφόσον η ροπή αδράνειας του δίσκου πριν και μετά την κρούση παραμένει η ίδια, η ελάττωση της στροφορμής του δίσκου, συνεπάγεται ελάττωση της γωνιακής του ταχύτητας.

Β΄ Τρόπος:

Για να αποκτήσει το σύστημα κοινή γωνιακή ταχύτητα ασκούνται δυνάμεις τριβής μεταξύ του δίσκου και του υλικού σημείου. Οι δυνάμεις τριβής είναι παράλληλες με την επιφάνεια του δίσκου. Η τριβή πάνω στο υλικό σημείο δημιουργεί ροπή δύναμης ως προς το κέντρο του δίσκου που αυξάνει τη γωνιακή ταχύτητα του υλικού σημείου κατά μήκος του άξονα περιστροφής (αρχικά είναι μηδέν και μετά αποκτά γωνιακή ταχύτητα και στροφορμή). Η ροπή δύναμης της τριβής πάνω στο δίσκο, λόγω του τρίτου νόμου του Νεύτωνα, είναι αντίθετη με τη ροπή της δύναμης τριβής πάνω στο υλικό σημείο. Άρα, η ροπή της δύναμης τριβής πάνω στο δίσκο μειώνει τη στροφορμή του δίσκου και έτσι μειώνεται η γωνιακή ταχύτητα (η ροπή αδράνειας του δίσκου μένει σταθερή).

(4 μον.)

***Σημ.* Η εξήγηση «Η ροπή αδράνειας του δίσκου αυξάνεται και άρα για να διατηρηθεί η στροφορμή του συστήματος, μειώνεται η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου», δεν είναι ορθή.**

(γ) Η κινητική ενέργεια του δίσκου λόγω της κρούσης με το υλικό σημείο, μειώνεται. Η μείωση της κινητικής ενέργειας εξηγείται ως εξής:

Α΄ Τρόπος:
Κατά την κρούση και μέχρι τα σώματα να αποκτήσουν κοινή γωνιακή ταχύτητα ασκείται δύναμη τριβής στο δίσκο από το υλικό σημείο η οποία μετατρέπει μέρος της αρχικής κινητικής ενέργειας του δίσκου σε άλλες μορφές ενέργειας, κυρίως θερμική.

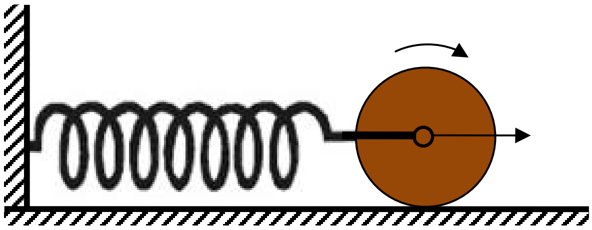
Β΄ Τρόπος:
Όπως αναφέραμε η δύναμη της τριβής στο δίσκο από το υλικό σημείο προκαλεί ροπή δύναμης ως προς το κέντρο του δίσκου η οποία μειώνει τη γωνιακή του ταχύτητα. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής δεν αλλάζει. Η κινητική ενέργεια του δίσκου δίνεται από τη σχέση: $E_K = \frac{1}{2} I \omega^2$. Βλέπουμε ότι η μείωση της γωνιακής ταχύτητας, έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση της κινητικής του ενέργειας.

(2 μον.)

Πρόβλημα - 3 **(15 μονάδες)**

Στο σχήμα ο ομογενής δίσκος, μάζας m και ακτίνας R, εκτελεί ταλάντωση, σε οριζόντια επιφάνεια, χωρίς απώλειες μηχανικής ενέργειας με τη βοήθεια αβαρούς ελατηρίου σταθεράς K. Όταν το κέντρο μάζας του δίσκου είναι μετατοπισμένο, από το κέντρο της ταλάντωσης, κατά τυχαία απόσταση x, ο δίσκος έχει γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω, ενώ το κέντρο μάζας του δίσκου έχει γραμμική ταχύτητα μέτρου $u_{\kappa.\mu.}$, όπου $u_{\kappa.\mu.} = \omega R$.

Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής, που περνά από το κέντρο μάζας του δίσκου, κάθετα στην επιφάνειά του, είναι $I = \frac{1}{2}mR^2$.



(α) Να γράψετε τη σχέση που δίνει την ενέργεια της ταλάντωσης στην τυχαία θέση $\vec{x}$, ως συνάρτηση των μεγεθών $m, u_{\kappa.\mu.}, K$ και x.

(β) Να αποδείξετε ότι το κέντρο μάζας του δίσκου εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

(γ) Να προσδιορίσετε την περίοδο της ταλάντωσης, ως συνάρτηση των μεγεθών m και K.

Λύση

(α) Η ενέργεια της ταλάντωσης αποτελείται από την κινητική ενέργεια (μεταφορική και περιστροφική) και την ελαστική δυναμική ενέργεια του ελατηρίου. Άρα,

$$E = \frac{1}{2}mu_{\kappa.\mu.}^2 + \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mu_{\kappa.\mu}^2 + \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\frac{u_{\kappa.\mu.}^2}{R^2} = \frac{3}{4}mu_{\kappa.\mu.}^2 + \frac{1}{2}Kx^2.$$

(5 μον.)

(β) Επειδή το άθροισμα της κινητικής και της ελαστικής δυναμικής ενέργειας παραμένει σταθερό με το χρόνο, τότε, η πρώτη παράγωγος της ενέργειας ως προς το χρόνο είναι μηδέν: $\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow 0 = \frac{3}{4}m2u_{\kappa.\mu.}\frac{du_{\kappa.\mu.}}{dt} + \frac{1}{2}K2x\frac{dx}{dt}$. Είναι $u_{\kappa.\mu.} = \frac{dx}{dt}$. Άρα, $0 = \frac{3}{2}m\frac{du_{\kappa.\mu.}}{dt} + Kx$. Είναι, $\frac{du_{\kappa.\mu.}}{dt} = a_{\kappa.\mu.}$. Άρα, $0 = \frac{3}{2}ma_{\kappa.\mu.} + Kx \Rightarrow a_{\kappa.\mu.} = -\frac{2}{3}\frac{K}{m}x$ Η σχέση αυτή δίνει την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του δίσκου. Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}_{\kappa.\mu.} \Rightarrow \Sigma\vec{F} = -\frac{2K}{3}\vec{x}$.

Η σχέση αυτή είναι της μορφής $\Sigma\vec{F} = -D\vec{x}$ που αποτελεί την αναγκαία συνθήκη για απλή αρμονική ταλάντωση. Άρα, το κέντρο μάζας του δίσκου εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

(6 μον.)

<u>Σημ.</u> Η λύση του ερωτήματος αυτού μπορεί να γίνει, εκτός από την ενεργειακή μέθοδο και με τη δυναμική μέθοδο. Δηλαδή εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα για μεταφορική και περιστροφική κίνηση και χρησιμοποίηση της σχέσης που συνδέει τη γραμμική και τη γωνιακή επιτάχυνση.

(γ) Συγκρινόμενη η σχέση $\Sigma\vec{F} = -\frac{2K}{3}\vec{x}$ με τη συνθήκη για απλή αρμονική ταλάντωση: $\Sigma\vec{F} = -D\vec{x}$, έχουμε ότι, $D = \frac{2K}{3}$. Άρα, η σταθερά της ταλάντωσης είναι: $D = \frac{2K}{3}$

Είναι: $D = m\omega^2$ και $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Από τις δύο σχέσεις έχουμε ότι, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$.

Αντικαθιστούμε τη σταθερά της ταλάντωσης: $T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{2K}}$.

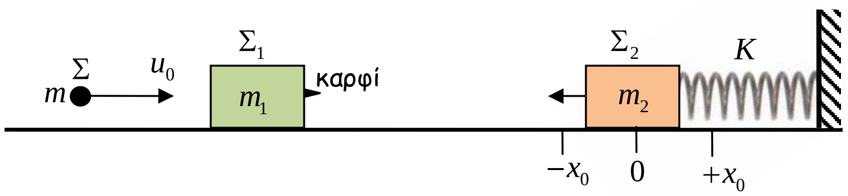
(4 μον.)

Πρόβλημα - 4 **(20 μονάδες)**

Στο σχήμα μια μικρή ελαστική σφαίρα Σ, μάζας $m = 0{,}1\,kg$, κινείται οριζόντια με σταθερή ταχύτητα μέτρου $u_0 = 13\,m/s$. Στη διεύθυνση της ταχύτητας της σφαίρας βρίσκονται τα κέντρα των μαζών δύο σωμάτων, Σ_1 και Σ_2, με μάζες $m_1 = 1{,}2\,kg$ και $m_2 = 0{,}4\,kg$ αντίστοιχα. Τα σώματα, Σ_1 και Σ_2, βρίσκονται πάνω σε οριζόντια επιφάνεια που δεν παρουσιάζει τριβές με τις επιφάνειες των σωμάτων.

Το σώμα Σ_1, το οποίο φέρει μικρό καρφί (βλέπε σχήμα), είναι ελεύθερο και αρχικά ακίνητο. Το σώμα Σ_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, πλάτους $x_0 = 20\,cm$, συνδεδεμένο με το ένα άκρο αβαρούς ελατηρίου σταθεράς $K = 160\,N/m$. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι σταθερά συνδεδεμένο σε κατακόρυφο τοίχο.

Θεωρήστε όλα τα σώματα ως υλικά σημεία.



Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ η σφαίρα Σ συγκρούεται με το σώμα Σ_1. Η κρούση είναι κεντρική και εντελώς ελαστική με αμελητέα διάρκεια. Τη στιγμή της κρούσης της σφαίρας με το σώμα Σ_1, το σώμα Σ_2 βρίσκεται στο αριστερό άκρο, $-x_0$, της ταλάντωσής του.

(α) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την ελαστική κρούση με τη σφαίρα.

Τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα Σ_1 συγκρούεται με το ταλαντευόμενο σώμα Σ_2. Στο χρονικό διάστημα μεταξύ των δύο χρονικών στιγμών t_0 και t_1 το σώμα Σ_2 εκτελεί ακριβώς δύο πλήρεις ταλαντώσεις. Λόγω της κρούσης, που γίνεται ακαριαία, το καρφί σφηνώνεται μέσα στο σώμα Σ_2 και τα δύο σώματα κινούνται συνεχώς μαζί χωρίς να χάσουν επαφή (πλαστική κρούση).

(β) Να υπολογίσετε την κοινή ταχύτητα των δύο σωμάτων (Σ_1 και Σ_2) αμέσως μετά την κρούση.

(γ) Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης των δύο σωμάτων (Σ_1 και Σ_2), μετά την κρούση.

(δ) Να χαράξετε σε βαθμολογημένους άξονες τη γραφική παράσταση της μετατόπισης $\vec{x}$ του σώματος Σ_2, από το σημείο ισορροπίας του, σε σχέση με το χρόνο, $\vec{x} = f(t)$, για το διάστημα $t_0 \le t \le t_2$, όπου t_2 είναι η χρονική στιγμή που το συσσωμάτωμα (Σ_1 και Σ_2) περνά από τη θέση $x = 0$ για δεύτερη φορά.

Λύση

(α) Έχουμε διατήρηση ορμής και κινητικής ενέργειας.

Α' Τρόπος

πριν και μετά την κρούση: $mu_0 = mv + m_1v_1$

Εφόσον η κρούση είναι εντελώς ελαστική, ισχύει η σχέση (διατήρηση ορμής και κινητικής ενέργειας): $u_0 + v = v_1$. Άρα, $mu_0 = m(v_1 - u_0) + m_1v_1 \Rightarrow v_1(m + m_1) = 2mu_0 \Rightarrow v_1 = \frac{2mu_0}{m + m_1}$.

Αντικαθιστούμε:

$$v_1 = \frac{2mu_0}{m + m_1} = \frac{2x0,1x13}{0,1+1,2} = 2\,m/s.$$

Β' Τρόπος

Υπολογίζουμε την ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος:

$$v_{\kappa.\mu.} = \frac{p_{\sigma\upsilon\sigma.}}{m + m_1} = \frac{0,1x13}{0,1+1,2} = \frac{1,3}{1,3} = 1\,m/s.$$

Είναι: $u_0 + v = v_1 = 2v_{\kappa.\mu.} \Rightarrow v_1 = 2\,m/s$.

(6 μον.)

(β) Έχουμε διατήρηση ορμής πριν και αμέσως μετά την πλαστική κρούση: $m_1v_1 = (m_1 + m_2)v_k$. Αντικαθιστούμε:

$$m_1v_1 = (m_1 + m_2)v_k \Rightarrow 1,2x2 = (1,2+0,4)v_k \Rightarrow 2,4 = 1,6v_k \Rightarrow v_k = 1,5\,m/s.$$

(4 μον.)

(γ) Έχουμε διατήρηση μηχανικής ενέργειας:

Α' Τρόπος

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_k^2 + \frac{1}{2}Kx_0^2 = \frac{1}{2}Kx_0'^2 \Rightarrow (1,2+0,4)(1,5)^2 + 160(0,2)^2 = 160x_0'^2$$

$$\Rightarrow 3,6 + 6,4 = 160x_0'^2 \Rightarrow x_0' = 0,25\,m.$$

Β' Τρόπος

Από τη σχέση $u = \omega\sqrt{x_0^2 - x^2}$, αμέσως μετά την κρούση:

$$v_k = \sqrt{\frac{K}{m_1 + m_2}}\sqrt{x_0'^2 - x_0^2} \Rightarrow 1,5 = \sqrt{\frac{160}{1,2+0,4}}\sqrt{x_0'^2 - 0,2^2} \Rightarrow 0,0225 = x_0'^2 - 0,04 \Rightarrow x_0' = 0,25\,m$$

(5 μον.)

(δ) Υπολογίζουμε την περίοδο πριν και μετά την κρούση των δύο σωμάτων.

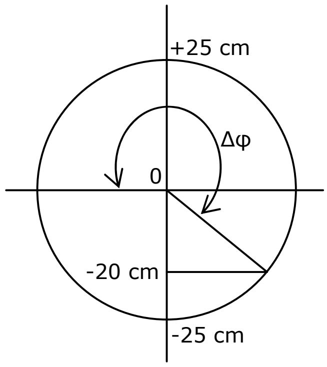
Η περίοδος πριν την κρούση:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{K}} \Rightarrow T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{0,4}{160}} = 0,1\,\pi\ s$$

Η περίοδος μετά την κρούση:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{1,6}{160}} = 0,2\,\pi\ s\,.$$

Υπολογίζουμε το χρόνο από τη στιγμή της κρούσης (-20 cm) μέχρι τη στιγμή που το σύστημα των δύο σωμάτων περνά από το $x=0$ για δεύτερη φορά, με νέο πλάτος ταλάντωσης 25 cm.

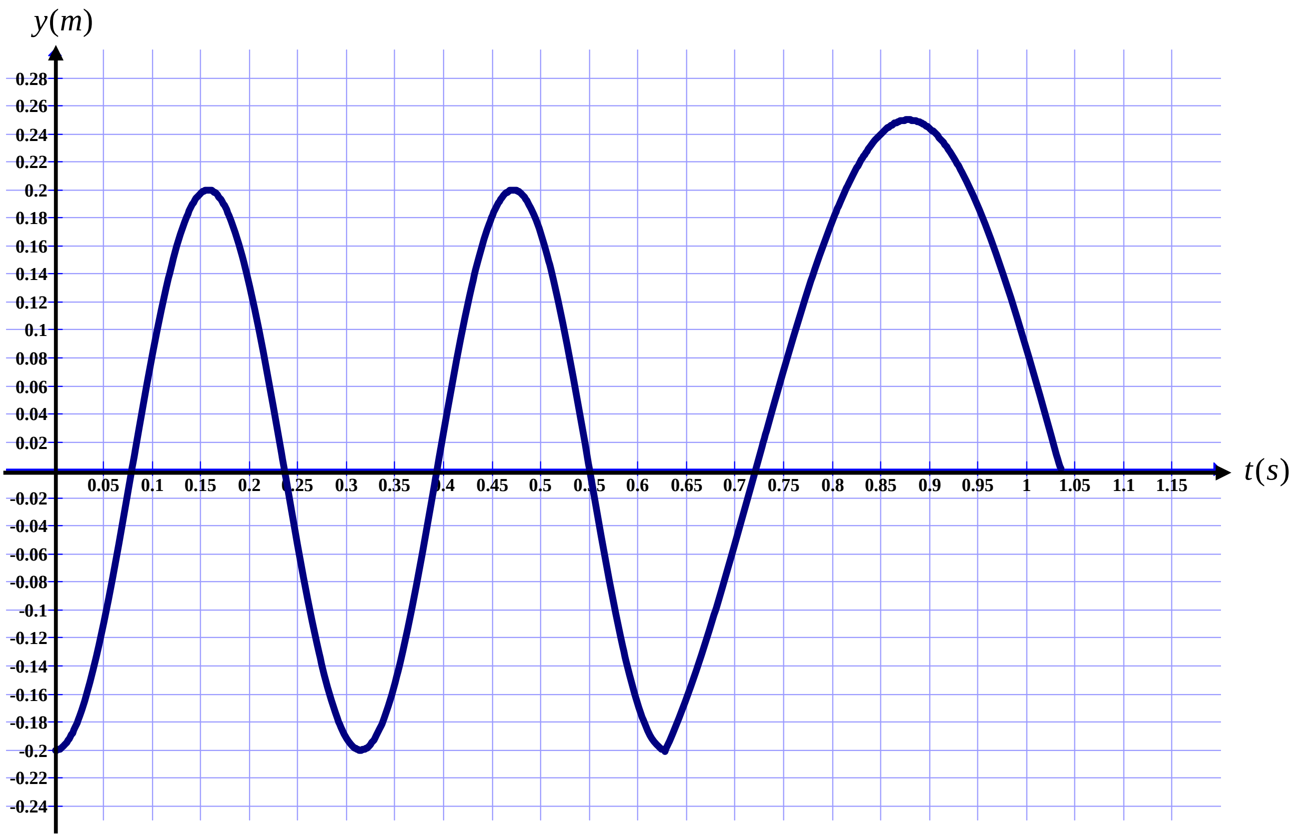


$$\Delta\varphi = \text{Τοξημ}\frac{20}{25} + \pi = 4,067\ rad \rightarrow .$$ Άρα,

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega_2} = \frac{4,067}{10} = 0,407\ s\,.$$

Άρα, η χρονική στιγμή t_2 είναι:

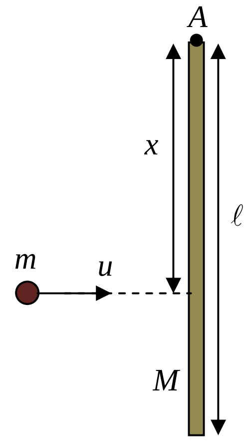
$$t_2 = 2T_1 + \Delta t = 0,2\pi + 0,4067 = 1,035\ s\,.$$



(5 μον.)

Πρόβλημα - 5 **(20 μονάδες)**

Μια ομογενής και ισοπαχής ράβδος μάζας M και μήκους ℓ μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, χωρίς τριβές, γύρω από το σταθερό οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο της, A. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα αυτόν είναι I_A. Αρχικά η ράβδος είναι κατακόρυφη σε ηρεμία.



Ένα υλικό σημείο μάζας m συγκρούεται και κολλά στη ράβδο σε απόσταση x από το άκρο A, όπως δείχνει το σχήμα. Τη στιγμή της κρούσης, που γίνεται ακαριαία, το υλικό σημείο έχει ταχύτητα μέτρου u με διεύθυνση οριζόντια και στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο που μπορεί να περιστρέφεται η ράβδος. Αμέσως μετά την κρούση το σύστημα της ράβδου και του υλικού σημείου αποκτά γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_0.

Το υλικό σημείο, μετά την κρούση, μένει μόνιμα κολλημένο στη ράβδο και δεν αποκολλάται σε καμιά στιγμή.

(α) Να εξάγετε τη σχέση που δίνει το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας, ω_0, ως συνάρτηση των μεγεθών I_A, m, u και x.

(β) Να δείξετε ότι, για σταθερές τιμές των μεγεθών I_A, u και m, το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας αμέσως μετά την κρούση, ω_0, παίρνει μέγιστη τιμή όταν η ροπή αδράνειας του υλικού σημείου και η ροπή αδράνειας της ράβδου, ως προς τον οριζόντιο άξονα περιστροφής, που περνά από το σημείο A, ισούνται.

Για τα ερωτήματα (γ), (δ) και (ε) θεωρήστε ότι:

$M = 3,6\,kg$, $m = 4,8\,kg$, $\ell = 2\,m$ και $I_A = \frac{1}{3}M\ell^2$.

(γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\omega_0 = f(x)$ για $0 \le x \le \ell$, σε βαθμολογημένους άξονες, δεδομένου ότι το μέτρο της ταχύτητας του υλικού σημείου είναι σταθερό με τιμή $u = 5\,m/s$.

Για τα ερωτήματα (δ) και (ε) θεωρήστε ότι η κρούση γίνεται στο μέσο (κέντρο μάζας) της ράβδου.

(δ) Έστω $\theta_{\max}$ η μέγιστη γωνία που μπορεί να σχηματίσει η ράβδος με την κατακόρυφη μετά την κρούση του υλικού σημείου με αυτή. Δεδομένου ότι το μέτρο της ταχύτητας του υλικού σημείου είναι σταθερό με τιμή $u = 5\,m/s$, να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\theta_{\max} = \frac{9}{14}$.

(ε) Να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή του μέτρου της ταχύτητας που πρέπει να έχει το υλικό σημείο τη στιγμή της κρούσης, $u_{\min}$, ώστε το σύστημα μετά την κρούση μόλις που να μπορεί να διαγράψει πλήρη κατακόρυφο κύκλο.

Λύση

Έχουμε διατήρηση στροφορμής πριν και αμέσως μετά την κρούση:

(α) $mux = (I_A + mx^2)\omega_0 \Rightarrow \omega_0 = \dfrac{mux}{I_A + mx^2}$.

(3 μον.)

(β) Για σταθερές τιμές των μεγεθών I_A, u και m, η τιμή της ω_0 είναι συνάρτηση της απόστασης x. Άρα, $\omega_0 = f(x)$. Είναι: $\omega_0 = \dfrac{mux}{I_A + mx^2}$. Για τοπικό ακρότατο πρέπει η πρώτη παράγωγος $\dfrac{d\omega_0}{dx}$ να μηδενίζεται. Άρα,

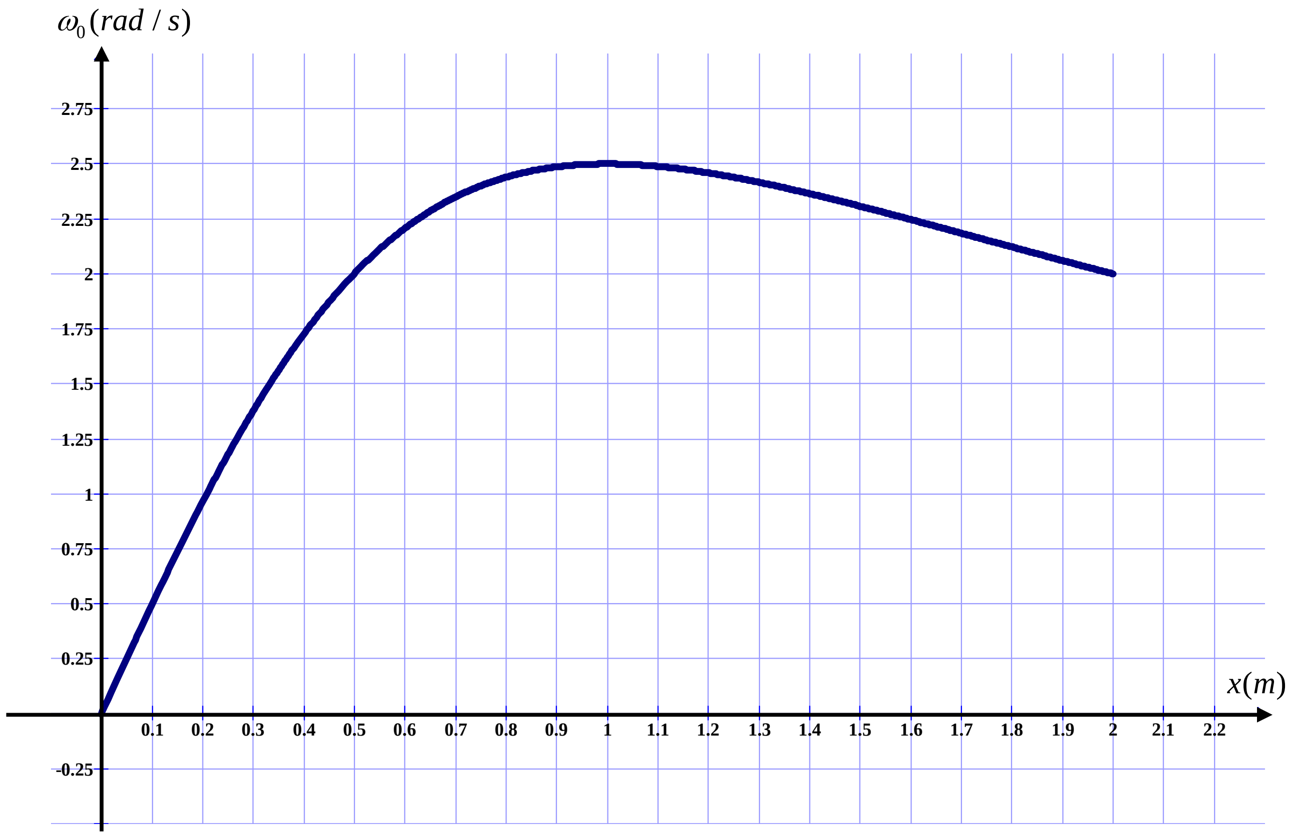
$$\frac{d\omega_0}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{mu(I_A + mx^2) - mux(2mx)}{(I_A + mx^2)^2} = 0 \Rightarrow \frac{mu(I_A - mx^2)}{(I_A + mx^2)^2} = 0 \Rightarrow I_A = mx^2 .$$

Άρα η $\dfrac{d\omega_0}{dx}$ μηδενίζεται για $I_A = mx^2$, δηλαδή η συνάρτηση $\omega_0 = f(x)$ παίρνει τοπικό ακρότατο όταν $I_A = mx^2$. Η συνάρτηση $\dfrac{d\omega_0}{dx}$ παίρνει θετική τιμή για $I_A > mx^2$ δηλαδή λίγο πριν η τιμή της ροπής αδράνειας του υλικού σημείου φτάσει τη ροπή αδράνειας της ράβδου (η συνάρτηση $\omega_0 = f(x)$ είναι αύξουσα) και παίρνει αρνητική τιμή όταν $I_A < mx^2$ δηλαδή μετά το τοπικό ακρότατο η συνάρτηση $\omega_0 = f(x)$ είναι φθίνουσα. Άρα, η συνάρτηση $\omega_0 = f(x)$ έχει τοπικό μέγιστο όταν $I_A = mx^2$.

Δηλαδή όταν η ροπή αδράνειας του υλικού σημείου και η ροπή αδράνειας της ράβδου, ως προς το σημείο περιστροφής A, ισούνται, η τιμή της γωνιακής ταχύτητας αμέσως μετά την πλαστική κρούση γίνεται μέγιστη.

(5 μον.)

(γ) Είναι: $\omega_0 = \dfrac{mux}{\frac{1}{3}M\ell^2 + mx^2} = \dfrac{4,8x5x}{\frac{1}{3}x3,6x2^2 + 4,8x^2} = \dfrac{24x}{4,8+4,8x^2} = \dfrac{5x}{1+x^2}$, μονάδες στο S.I. Για $x=0$ και $\omega_0 = 0$. Για $I_A = mx^2 \Rightarrow 4,8 = 4,8x^2 \Rightarrow x = 1\,m$ η τιμή της ω_0 παίρνει μέγιστη τιμή. Είναι, $\omega_{0(\max)} = 2,5\,m/s$. Για μεγαλύτερες τιμές του x η τιμή της γωνιακής ταχύτητας μειώνεται. Για $x = 2\,m$, είναι $\omega_0 = 2\,m/s$.



(4 μον.)

(δ) Εφόσον η κρούση γίνεται στο κέντρο της ράβδου, $x = 1\,m$ και $\omega_0 = 2,5\,m/s$. Το υλικό σημείο και το κέντρο μάζας της ράβδου ανεβαίνουν στο ίδιο μέγιστο ύψος. Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας έχουμε:

$\dfrac{1}{2}(I_A + mx^2)\omega_0^2 = mgh_{\max} + Mgh_{\max} \Rightarrow \dfrac{1}{2}(4,8+4,8)2,5^2 = 84h_{\max} \Rightarrow h_{\max} = \dfrac{5}{14}$. Είναι,

$$\sigma\upsilon\nu\theta_{\max} = \frac{\frac{\ell}{2} - h}{\frac{\ell}{2}} = \frac{1 - \frac{5}{14}}{1} = \frac{9}{14}.$$

(4 μον.)

(ε) Για να μπορεί η ράβδος με το υλικό σημείο να εκτελέσει πλήρη κατακόρυφο κύκλο πρέπει η κινητική ενέργεια αμέσως μετά την πλαστική κρούση να γίνει ίση με την αύξηση της βαρυτικής δυναμικής ενέργεια του συστήματος όταν η ράβδος περιστραφεί κατά 180^0. Άρα,

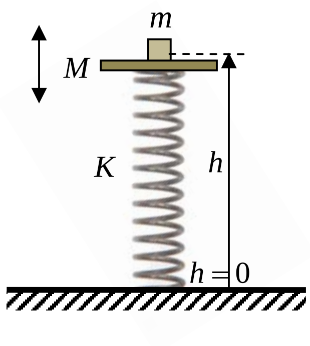
$\frac{1}{2}(I_A + mx^2)\omega^2_{0(\min)} = mg\ell + Mg\ell \Rightarrow \frac{1}{2}(4,8+4,8)\omega^2_{0(\min)} = 168 \Rightarrow \omega_{0(\min)} = \sqrt{35}\ rad/s$. Άρα,

$$\omega_{0(\min)} = \frac{mu_{\min}x}{\frac{1}{3}M\ell^2 + mx^2} \Rightarrow \sqrt{35} = \frac{4,8u_{\min}}{4,8+4,8} \Rightarrow u_{\min} = 2\sqrt{35}\ m/s = 11,8\ m/s .$$

(4 μον.)

Πρόβλημα - 6 **(25 μονάδες)**

Α. Ένα κατακόρυφο ελατήριο, αμελητέας μάζας, και σταθεράς K είναι στερεωμένο στο ένα άκρο του σε οριζόντιο ακλόνητο επίπεδο. Στο άλλο άκρο του ελατηρίου συνδέεται ένας λεπτός δίσκος μάζας $M = 0,2\,kg$ πάνω στον οποίο τοποθετείται ένας μικρός κύβος μάζας $m = 0,1\,kg$. Το σύστημα των δύο σωμάτων εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση στην κατακόρυφη διεύθυνση. Το ύψος που βρίσκεται το σύστημα από το έδαφος (όπου $h = 0$), δίνεται από τη σχέση: $h = 0,4 + 0,1\sigma\upsilon\nu(2\pi t)$, όπου οι μονάδες μέτρησης όλων των μεγεθών είναι στο S.I. Θεωρήστε τα δύο σώματα ως υλικά σημεία.



(α) Να χαράξετε σε βαθμολογημένους άξονες τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h = f(t)$, για το χρονικό διάστημα $0 \le t \le 2T$, όπου T είναι η περίοδος της ταλάντωσης του συστήματος.

(β) (i) Να υπολογίσετε τη σταθερά της ταλάντωσης του συστήματος των δύο σωμάτων.

(ii) Να αποδείξετε ότι η σταθερά της ταλάντωσης του συστήματος των δύο σωμάτων είναι ίση με την τιμή της σταθεράς του ελατηρίου.

(γ) Να εξηγήσετε αν η σταθερά της ταλάντωσης του κύβου είναι ίση ή όχι με τη σταθερά του ελατηρίου.

(δ) (i) Να προσδιορίσετε την εξίσωση της ταχύτητας u του συστήματος, ως συνάρτηση του ύψους h από το έδαφος, $u = f(h)$.

(ii) Να χαράξετε σε βαθμολογημένους άξονες τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $u = f(h)$.

(ε) Να υπολογίσετε το ελάχιστο και το μέγιστο μέτρο της δύναμης, που ασκείται στον κύβο από το δίσκο.

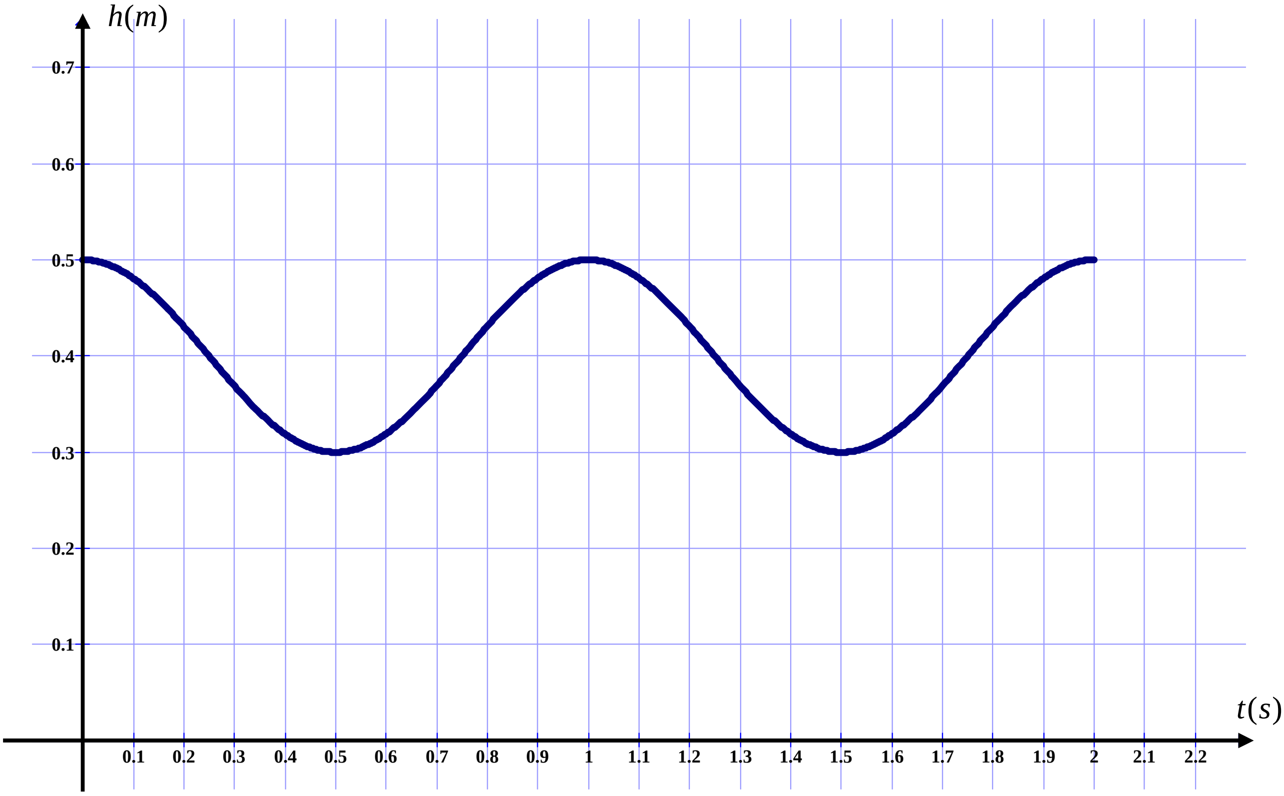
Β. Σταματούμε το σύστημα από την ταλάντωση που εκτελούσε και το αφήνουμε να ηρεμήσει. Από το σημείο που το σύστημα είναι σε ισορροπία, όπου θέτουμε $y = 0$, συμπιέζουμε το ελατήριο κατακόρυφα προς τα κάτω ώστε το σύστημα να απέχει από το έδαφος ύψος $h = 10\,cm$. Στη συνέχεια αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο να κινηθεί κατακόρυφα.

(στ) Να υπολογίσετε την μετατόπιση $\vec{y}$, από το σημείο ισορροπίας, $y = 0$, τη στιγμή που ο κύβος χάνει επαφή με το δίσκο.

(ζ) Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης του δίσκου, για όσο χρόνο ο κύβος δεν είναι σε επαφή με αυτόν.

Λύση

(Α) (α) Το πλάτος της ταλάντωσης είναι $y_0 = 0,1\,m$ και η περίοδος είναι $T = 1\,s$. Το κέντρο της ταλάντωσης (σημείο ισορροπίας) δεν είναι το σημείο αναφοράς. Το σημείο αναφοράς είναι στο $y = 0,4\,m$. Η μέγιστη μετατόπιση του σώματος από το σημείο αναφοράς έχει μέτρο 0,5 m και η ελάχιστη μετατόπιση έχει μέτρο 0,3 m.



(3 μον.)

(β) (i) Η κυκλική συχνότητα είναι: $\omega = 2\pi\ rad/s$. Άρα,

$D = (M+m)\omega^2 \Rightarrow D = (0,2+0,1)4\pi^2 = 1,2\pi^2 = 12\ N/m$.

(2 μον.)

(ii) Α΄ Τρόπος (Δυναμική μέθοδος)
Εφόσον το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, ικανοποιεί τη σχέση: $\Sigma\vec{F} = -D\vec{y}$, όπου $\vec{y}$ είναι η μετατόπιση του συστήματος από το σημείο ισορροπίας (κέντρο της ταλάντωσης). Στο σημείο ισορροπίας το βάρος του συστήματος είναι κατά μέτρο ίσο με το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου στο σύστημα και οι δύο δυνάμεις έχουν αντίθετη φορά. Άρα, έχουμε: $(M+m)\vec{g} = -\vec{F}_1$. Είναι $\vec{F}_1 = -K\vec{e}$ (Νόμος του Hooke). Άρα, $(M+m)\vec{g} = K\vec{e}$, όπου e είναι η στατική επιμήκυνση του ελατηρίου. Σε ένα τυχαίο σημείο της ταλάντωσης, έχουμε: $\Sigma\vec{F} = (M+m)\vec{g} + \vec{F}_2$, όπου $\vec{F}_2 = -K(\vec{e}+\vec{y})$ είναι η δύναμη του ελατηρίου στο σύστημα στο τυχαίο σημείο. Άρα,
$\Sigma\vec{F} = (M+m)\vec{g} - K(\vec{e}+\vec{y})$. Τελικά με βάση τη σχέση στο σημείο ισορροπίας, έχουμε, $\Sigma\vec{F} = -K\vec{y}$. Άρα, $-D\vec{y} = -K\vec{y} \Rightarrow D = K$.

Β΄ Τρόπος (Ενεργειακή μέθοδος)
Η ενέργεια της ταλάντωσης είναι σταθερή με το χρόνο. Άρα,
$$E = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}Ky^2, \quad \frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow 0 = mu\frac{du}{dt} + Ky\frac{dy}{dt} \Rightarrow ma + Ky = 0$$
$\Rightarrow a = -\frac{K}{m}y \Rightarrow \Sigma\vec{F} = -K\vec{y}$. Συγκρινόμενη η σχέση αυτή με τη $\Sigma\vec{F} = -D\vec{y}$, έχουμε $D = K$.

(3 μον.)

(γ) Ο κύβος και ο δίσκος εκτελούν αρμονική ταλάντωση με την ίδια κυκλική συχνότητα.
Η κυκλική συχνότητα ικανοποιεί τη σχέση: $\omega = \sqrt{\frac{D_1}{m}} = \sqrt{\frac{D_2}{M}} = \sqrt{\frac{D}{m+M}}$, όπου $D = K$.
Άρα η σταθερά της ταλάντωσης του κύβου, μάζας m, ικανοποιεί τη σχέση,
$$D_1 = \frac{m}{m+M}K.$$
Άρα, η σταθερά της ταλάντωσης του κύβου δεν είναι ίση με τη σταθερά του ελατηρίου.

Εναλλακτικά, μπορεί κάποιος να υπολογίσει τη σταθερά ταλάντωσης του κύβου:
$D_1 = m\omega^2 = 0{,}1x4\pi^2 = 0{,}4\pi^2 = 4\ N/m$.
Η σταθερά του ελατηρίου είναι $K = 12\ N/m$.
Άρα, η σταθερά της ταλάντωσης του κύβου δεν είναι ίση με τη σταθερά του ελατηρίου.

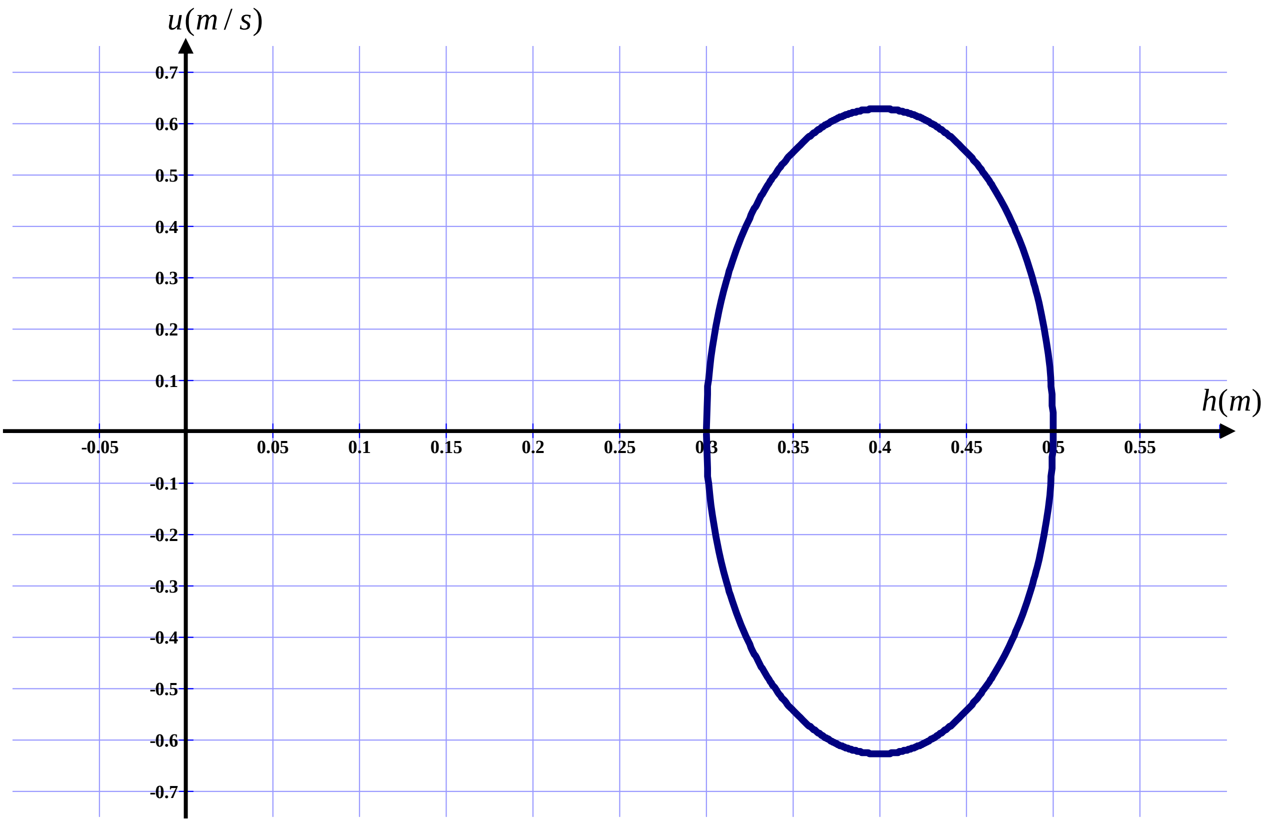
(3 μον.)

(δ) (i) $u = \frac{dy}{dt} = -0,2\pi\eta\mu(2\pi t)$. Άρα, $\eta\mu(2\pi t) = -\frac{u}{0,2\pi}$. Είναι $\sigma\upsilon\nu(2\pi t) = \frac{h-0,4}{0,1}$.

Άρα, $\frac{(h-0,4)^2}{0,01} + \frac{u^2}{0,04\pi^2} = 1 \Rightarrow \frac{u^2}{0,04\pi^2} = 1 - \frac{(h-0,4)^2}{0,01} \Rightarrow u = \pm 2\pi\sqrt{0,01-(h-0,4)^2}$.

(2 μον.)

(ii) Το πλάτος της ταχύτητας ταλάντωσης είναι $u_0 = \omega y_0 = 2\pi x 0,1 = 0,628\, m/s$.



(3 μον.)

(ε) <u>Α΄ Τρόπος</u>:

Η συνισταμένη δύναμη στον κύβο ενεργεί ως δύναμη επαναφοράς:

$m\vec{g} + \vec{F} = -D_1\vec{y}$, Είναι: $D_1 = 4\, N/m$ και $m = 0,1\, kg$. Άρα,

$0,1\vec{g} + \vec{F} = -4\vec{y} \Rightarrow \vec{F} = -4\vec{y} - 0,1\vec{g}$.

Θεωρούμε θετική φορά προς τα πάνω: $F = -4y + 1$, όπου οι μονάδες είναι στο S.I.

Είναι: $-0,1 \le y \le +0,1$. Άρα. $F_{min} = -4x0,1 + 1 = 0,6\, N$ και $F_{max} = -4(-0,1) + 1 = 1,4\, N$.

Β΄ Τρόπος: Το μέγιστο μέτρο της δύναμης που ασκείται στον κύβο από το δίσκο είναι στο κατώτατο σημείο της ταλάντωσης και η ελάχιστη τιμή του μέτρου της δύναμης που ασκείται στον κύβο από το δίσκο είναι στο ανώτατο σημείο της ταλάντωσης. Άρα,
$F_{max} - mg = ma_0 \Rightarrow F_{max} = m(g+\omega^2 y_0) \Rightarrow F_{max} = 0,1(10+40x0,1) \Rightarrow F_{max} = 1,4\ N$.
$mg - F_{min} = ma_0 \Rightarrow F_{min} = m(g-\omega^2 y_0) \Rightarrow F_{min} = 0,1(10-40x0,1) \Rightarrow F_{min} = 0,6\ N$.

(3 μον.)

(Β) (στ) Α΄ Τρόπος:
Τη στιγμή που ο κύβος χάνει επαφή με το δίσκο, $\vec{F} = \vec{0}$. Άρα,
$\vec{0} = -4\vec{y} - 0,1\vec{g} \Rightarrow \vec{y} = -0,025\vec{g}$. Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι το διάνυσμα θέσης είναι αντίθετο με το διάνυσμα της επιτάχυνσης της βαρύτητας, τη στιγμή που ο κύβος χάνει επαφή. Δηλαδή ο κύβος χάνει επαφή πάνω από το σημείο ισορροπίας. Με θετική φορά προς τα πάνω, έχουμε: $\vec{y} = -0,025\vec{g} \Rightarrow y = 0,25\ m$.

Β΄ Τρόπος:
Τη στιγμή που ο κύβος χάνει επαφή με το δίσκο, το μέτρο της επιτάχυνσης του συστήματος είναι ίσο με το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας. Άρα,
$a = \omega^2 y \Rightarrow 10 = 40y \Rightarrow y = 0,25\ m$, πάνω από τη θέση ισορροπίας.

(3 μον.)

(ζ) Η ταχύτητα του δίσκου και του κύβου, όταν ο κύβος χάνει επαφή με το δίσκο είναι:
$u = \omega\sqrt{y_0^2 - y^2} \Rightarrow u = 2\pi\sqrt{0,30^2 - 0,25^2} \Rightarrow u = 1,041\ m/s$.
Όταν ο κύβος χάνει επαφή με το δίσκο, μετατοπίζεται το αρχικό κέντρο της ταλάντωσης του συστήματος, προς τα πάνω κατά (νόμος του Hooke),
$mg = K\Delta y \Rightarrow 1 = 12\Delta y \Rightarrow \Delta y = 0,0833\ m$.
Υπολογίζουμε το νέο πλάτος ταλάντωσης από τη σχέση:
$$u = \sqrt{\frac{K}{M}}\sqrt{y_0^{'2} - (y-\Delta y)^2} \Rightarrow 1,041 = \sqrt{\frac{12}{0,2}}\sqrt{y_0^{'2} - (0,25-0,0833)^2}.$$
$$\Rightarrow 0,01806 = y_0^{'2} - 0,0278 \Rightarrow y_0^{'} = 0,214\ m = 21,4\ cm.$$

<u>Σημ.</u> το νέο πλάτος υπολογίζεται, ισοδύναμα με την πιο πάνω σχέση, με τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας της ταλάντωσης.
$$\frac{1}{2}Mu^2 + \frac{1}{2}K(y-\Delta y)^2 = \frac{1}{2}Ky_0^{'2} \Rightarrow y_0^{'} = 21,4\ cm.$$

(3 μον.)