ΕΝΩΣΗ ΚΥΠΡΙΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ

26 Η ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Κυριακή, 13 Μαΐου, 2012

Παρακαλώ διαβάστε πρώτα τα πιο κάτω, πριν απαντήσετε οποιαδήποτε ερώτηση

Γενικές Οδηγίες:

1) Είναι πολύ σημαντικό να δηλώσετε ορθά στον κατάλληλο χώρο στο εξώφυλλο του τετραδίου απαντήσεων τα εξής στοιχεία: (α) Όνομα και Επώνυμο, (β) Όνομα πατέρα, (γ) Σχολείο, (δ) Τηλέφωνο.
2) Το δοκίμιο αποτελείται από οκτώ (8) σελίδες και περιέχει οκτώ (8) θέματα.
3) Η εξέταση διαρκεί τρεις (3) ώρες.
4) Η συνολική βαθμολογία του εξεταστικού δοκιμίου είναι 100 μονάδες.
5) Χρησιμοποιήστε μόνο στυλό με μελάνι χρώματος μπλε ή μαύρο. Οι γραφικές παραστάσεις μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
6) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
7) Επιτρέπεται η χρήση, μόνο, μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.
8) Δηλώστε στις σελίδες του τετραδίου απαντήσεων τον αριθμό του προβλήματος και το αντίστοιχο γράμμα του ερωτήματος που απαντάτε.
9) Εάν χρησιμοποιήσετε κάποιες σελίδες του τετραδίου απαντήσεων για δικές σας σημειώσεις που δεν επιθυμείτε να βαθμολογηθούν, βάλτε ένα μεγάλο σταυρό (Χ) σε αυτές τις σελίδες ώστε να μην ληφθούν υπόψη στη βαθμολόγηση.
10) Να χρησιμοποιείτε μόνο σταθερές ή σχέσεις που δίνονται στο αντίστοιχο θέμα αλλά και στο τέλος των γενικών οδηγιών.
11) Τα σχήματα όλων των θεμάτων δεν είναι υπό κλίμακα.

Σταθερές:

$\pi = 3{,}14$, $g_{0(\Gamma\eta)} = 10\, m \cdot s^{-2}$, $K_0 = 9x10^9 \mathrm{N} \cdot m^2 \cdot C^{-2}$, $G = 6{,}673x10^{-11} \mathrm{N} \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$,

Να απαντήσετε όλα τα προβλήματα που ακολουθούν.

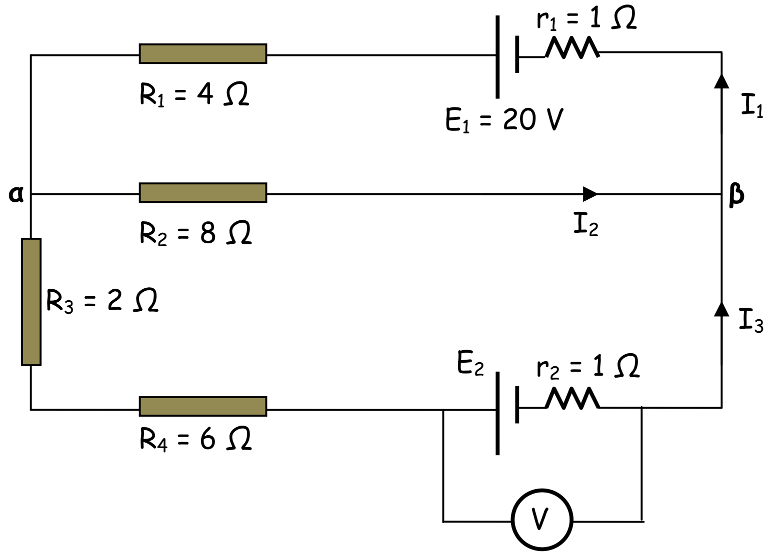
Πρόβλημα - 1 **(6 μονάδες)**

Για το κύκλωμα του σχήματος δίνεται ότι η διαφορά δυναμικού στα άκρα **α**, **β**, είναι 10 V. Να υπολογίσετε:

(α) Τις τιμές των εντάσεων των ρευμάτων I_1, I_2 και I_3.

(β) Την ηλεκτρεγερτική δύναμη E_2.

(γ) Την ένδειξη του βολτομέτρου.



Λύση

(α) $V_{\alpha\beta} = I_2 R_2 \Rightarrow I_2 = \frac{V_{\alpha\beta}}{R_2} = \frac{10}{8} = 1,25\,\text{A}$. ***(0,5 μον.)***

Είναι, $V_{\alpha\beta} = \Sigma(IR) - \Sigma E \Rightarrow V_{\alpha\beta} = -I_1(r_1 + R_1) - (-E_1)$. Άρα,

$10 = -I_1(1+4) - (-20) \Rightarrow 5I_1 = 10 \Rightarrow I_1 = 2\,\text{A}$. ***(1 μον.)***

Είναι για κόμβο, $I_2 + I_3 = I_1 \Rightarrow 1,25 + I_3 = 2 \Rightarrow I_3 = 0,75\,\text{A}$. ***(0,5 μον.)***

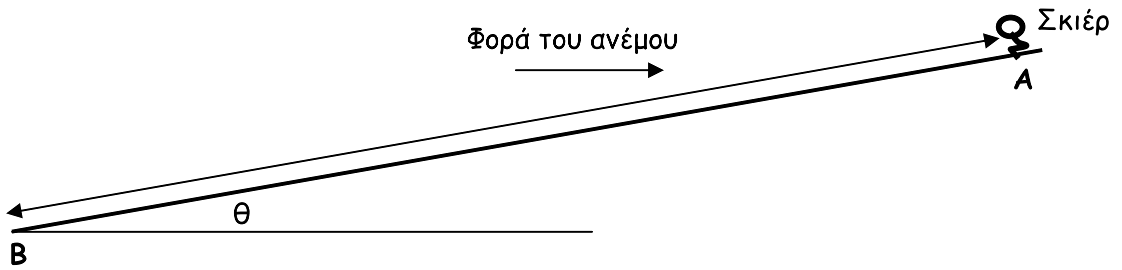
(β) $V_{\alpha\beta} = \Sigma(IR) - \Sigma E = I_3(r_2 + R_3 + R_4) + E_2 \Rightarrow 10 = 6,75 + E_2 \Rightarrow E_2 = 3,25V$. ***(1,5 μον.)***

(γ) Είναι $V = E_2 + I_3 r_2 \Rightarrow V = 3,25 + 0,75 = 4V$. ***(2,5 μον.)***

Β΄ Τρόπος: $V_{\alpha\beta} = \Sigma(IR) - \Sigma E \Rightarrow V_{\alpha\beta} = I_3(R_3 + R_4) + V \Rightarrow 10 = 0,75(2+6) + V \Rightarrow V = 4V$

Πρόβλημα - 2 **(8 μονάδες)**

Ένας σκιέρ μάζας 70,0 kg ξεκινά από την ηρεμία από την κορυφή Α μιας χιονισμένης βουνοπλαγιάς η οποία έχει σταθερή κλίση θ = 10,0^0 με το οριζόντιο επίπεδο, όπως δείχνει το σχήμα. Οι τριβές του σκιέρ με την επιφάνεια του χιονιού είναι αμελητέες.
Ο σκιέρ φτάνει στο κάτω σημείο Β της βουνοπλαγιάς διανύοντας συνολική απόσταση ΑΒ = 100 m.
Σε όλη τη διάρκεια της κίνησης του σκιέρ πνέει άνεμος με οριζόντια διεύθυνση, έτσι ώστε να ασκείται συνεχώς στον σκιέρ σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου 50 Ν, με φορά που αντιτίθεται στην κίνηση του σκιέρ (προς τα δεξιά), όπως δείχνει το σχήμα.
(Δίνεται: ημ10° = 0,174, συν10° = 0,985).



Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σκιέρ τη στιγμή που φτάνει στο σημείο Β.

Λύση

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου – κινητικής ενέργειας.

$(mg\eta\mu\theta - F\sigma\upsilon\nu\theta)(AB) = \frac{1}{2}mu^2$. ***(6 μον.)***

Αντικαθιστούμε,

$(700x0,174 - 50x0,985)(100) = \frac{1}{2}70u^2 \Rightarrow u = 14,4\, m/s$. ***(2 μον.)***

Β' Τρόπος: Εναλλακτικά, υπολογίζουμε πρώτα το μέτρο της επιτάχυνσης του σκιέρ, $a = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{mg\eta\mu\theta - F\sigma\upsilon\nu\theta}{m} = \frac{121,8 - 49,25}{70} = 1,036\, m/s$. ***(3 μον.)***

Το μέτρο της ταχύτητας υπολογίζεται από τη σχέση

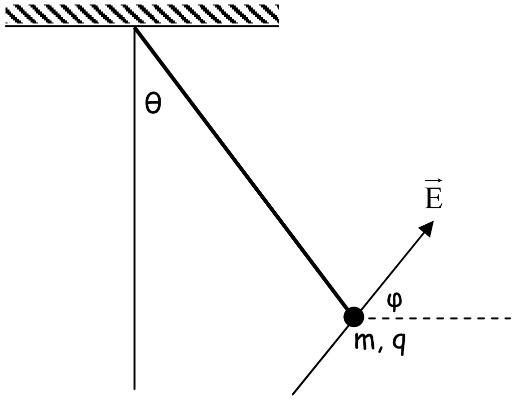
$u^2 = u_0^2 + 2ax$. ***(3 μον.)*** (**Σημείωση**: Η απόδειξη της σχέσης αυτής δεν απαιτείται).

$u^2 = u_0^2 + 2ax \Rightarrow u^2 = 2 \cdot 1,036 \cdot 100 \Rightarrow u = 14,4\, m/s$. ***(2 μον.)***

Πρόβλημα - 3 (10 μονάδες)

Ένα ηλεκτρικά φορτισμένο σωματίδιο μάζας $m = 2,0$ g και ηλεκτρικού φορτίου ποσότητας q, βρίσκεται σε στατική ισορροπία στην παρουσία βαρυτικού και ηλεκτροστατικού πεδίου. Το σωματίδιο βρίσκεται συνδεδεμένο στο ένα άκρο αβαρούς νήματος. Το άλλο άκρο του νήματος είναι συνδεδεμένο σε ακλόνητο σημείο. Το νήμα σχηματίζει γωνία $\theta = 37,0^0$ με την κατακόρυφο διεύθυνση. Το ηλεκτροστατικό πεδίο έχει ένταση μέτρου $E = 6,40$ N/C και σχηματίζει γωνία $\varphi = 51,3^0$ με τον οριζόντιο άξονα, όπως δείχνει το σχήμα.

(Δίνεται: ημ37,0° = 0,602, συν37,0° = 0,799 και
ημ51,3^0 = 0,780 και συν51,3^0 = 0,625).



(α) Να εξηγήσετε αν το φορτίο q είναι θετικό ή αρνητικό.

(β) Να υπολογίσετε το φορτίο q του σωματιδίου.

Λύση

(α) Το φορτίο είναι θετικό. ***(1 μον.)***

Έτσι, η ηλεκτροστατική δύναμη είναι στην ίδια φορά με την ένταση Ε του πεδίου, με αποτέλεσμα να υπάρχει οριζόντια συνιστώσα αντίθετη της οριζόντιας συνιστώσας της τάσης του νήματος για να υπάρχει και ισορροπία. Στην αντίθετη περίπτωση (αν το φορτίο ήταν αρνητικό) η συνισταμένη δύναμη στην οριζόντια διεύθυνση δεν θα έδινε αποτέλεσμα μηδέν, εφόσον τότε η ηλεκτροστατική δύναμη θα ήταν αντίθετη της έντασης Ε και θα έδινε συνιστώσα στην ίδια φορά με την οριζόντια συνιστώσα της τάσης του νήματος. ***(2 μον.)***

(β) Η ηλεκτροστατική δύναμη στο φορτίο έχει τη φορά της έντασης του πεδίου, με συνιστώσες $F_x = Eq\sigma\upsilon\nu\varphi$ και $F_y = Eq\eta\mu\varphi$. ***(2 μον.)***

Στο σωματίδιο ασκείται επίσης το βάρος Β και η τάση του νήματος S. Από τις συνθήκες ισορροπίας στο y και το x άξονα, έχουμε αντίστοιχα,

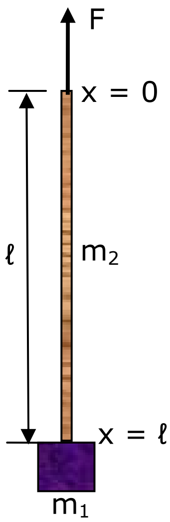
$S\sigma\upsilon\nu\theta + \mathrm{E}q\eta\mu\varphi = mg$ και $S\eta\mu\theta = \mathrm{E}q\sigma\upsilon\nu\varphi$. ***(3 μον.)***

Αντικαθιστούμε,

$0,799S + 4,992q = 0,02$ και $0,602S = 4q$. Άρα, $S = 6,645q$. Έτσι η πρώτη εξίσωση δίνει, $5,309q + 4,992q = 0,02 \Rightarrow 10,301q = 0,02 \Rightarrow q = +1,9x10^{-3}\,C$ (θετικό). ***(2 μον.)***

Πρόβλημα - 4 (12 μονάδες)

Ένα σώμα μάζας m_1 συνδέεται σταθερά στο κάτω άκρο ενός κατακόρυφου μη ελαστικού σχοινιού μάζας m_2 και μήκους ℓ, σταθερής γραμμικής πυκνότητας (μάζα ανά μονάδα μήκους). Ασκούμε στο πάνω άκρο του σχοινιού κατακόρυφη σταθερή δύναμη μέτρου F. Το σχοινί μαζί με το σώμα επιταχύνονται κατακόρυφα προς τα πάνω με σταθερή επιτάχυνση μέτρου α. Η αντίσταση του αέρα να θεωρηθεί αμελητέα.



(α) Να αποδείξετε τη σχέση που δίνει το μέτρο της επιτάχυνσης α σε συνάρτηση των μεγεθών m_1, m_2, F και της επιτάχυνσης της βαρύτητας g.

(β) (i) Να αποδείξετε τη σχέση που δίνει την τάση του σχοινιού που ασκείται στο σώμα, σε συνάρτηση των μεγεθών m_1, m_2 και F.

(ii) Να εξηγήσετε ποια θα ήταν η τάση του σχοινιού στο σώμα, αν η μάζα του σχοινιού, m_2, ήταν αμελητέα σε σχέση με τη μάζα m_1 του σώματος, ($m_2 \ll m_1$). Να επαληθεύσετε την απάντησή σας με βάση τη σχέση που αποδείξατε στο ερώτημα (β) (i).

(γ) Να αποδείξετε τη σχέση που δίνει την τάση του σχοινιού σε συνάρτηση με την απόσταση x, μετρούμενη από το πάνω άκρο του σχοινιού, όπου $0 \le x \le \ell$, και τα μεγέθη m_1, m_2, F και ℓ.

Λύση

(α) Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της δυναμικής για το σύστημα σώμα – σχοινί.

$\Sigma\vec{F} = (m_1 + m_2)\vec{a} \Rightarrow F - (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a$. Άρα, $a = \dfrac{F}{m_1 + m_2} - g$. ***(2 μον.)***

(β) (i) Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της δυναμικής για το σώμα.

$\Sigma\vec{F} = m_1\vec{a} \Rightarrow S - m_1 g = m_1 a \Rightarrow S = m_1(a + g)$.

Αντικαθιστούμε το μέτρο της επιτάχυνσης,

$S = m_1(\dfrac{F}{m_1 + m_2} - g + g) \Rightarrow S = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}F$. ***(2 μον.)***

(ii) Αν η μάζα του σχοινιού ήταν αμελητέα σε σχέση με τη μάζα του σώματος, τότε η τάση κατά μήκος του σχοινιού θα είχε την ίδια τιμή. Έτσι η τάση στο σώμα θα είχε το μέτρο της δύναμης F. ***(1 μον.)***

Αυτό προκύπτει και από τη σχέση $S = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}F \Rightarrow S = \dfrac{F}{1 + \dfrac{m_2}{m_1}}$, εφόσον όταν $m_2 << m_1$,

το πηλίκο $\dfrac{m_2}{m_1}$ τείνει στο μηδέν και άρα, $S = F$. ***(1 μον.)***

(γ) Έστω m η μάζα του σχοινιού με μήκος $\ell - x$. Επειδή η γραμμική πυκνότητα του σχοινιού είναι σταθερή, ισχύει $\dfrac{m_2}{\ell} = \dfrac{m}{\ell - x} \Rightarrow m = m_2\dfrac{\ell - x}{\ell}$. ***(2 μον.)***

Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της δυναμικής για τη μάζα $m_1 + m$. Άρα,

$\Sigma\vec{F} = (m_1 + m)\vec{a}$. Άρα,

$S - m_1 g - mg = (m_1 + m)a \Rightarrow S = g(m + m_1) + a(m + m_1) = (m + m_1)(a + g)$. ***(2 μον.)***

$\Rightarrow S = (m + m_1)\dfrac{F}{m_1 + m_2}$. Αντικαθιστούμε τη μάζα m. Άρα,

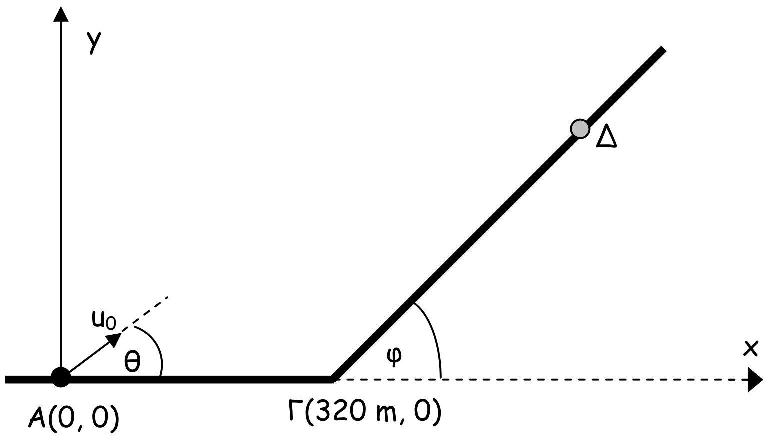
$\Rightarrow S = (m_2\dfrac{\ell - x}{\ell} + m_1)\dfrac{F}{m_1 + m_2} = (m_2 - m_2\dfrac{x}{\ell} + m_1)\dfrac{F}{m_1 + m_2} \Rightarrow S = F(1 - \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\dfrac{x}{\ell})$.

(2 μον.)

Πρόβλημα - 5 **(14 μονάδες)**

Ένα βλήμα εκτοξεύεται τη χρονική στιγμή t = 0 από το σημείο Α (0, 0) του εδάφους με αρχική ταχύτητα μέτρου u_0 = 300 m/s και διεύθυνση που σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα x γωνία θ = 37^0. Το επίπεδο του εδάφους είναι οριζόντιο για απόσταση 320 m από το σημείο βολής Α (0, 0) μέχρι το σημείο Γ(320 m, 0) και μετά σχηματίζει σταθερή κλίση με γωνία φ = 45^0 με το οριζόντιο επίπεδο. Το βλήμα συναντά το έδαφος στο σημείο Δ, στο κεκλιμένο επίπεδο, όπως δείχνει το σχήμα. Η αντίσταση του αέρα να θεωρηθεί αμελητέα.

(Δίνεται: ημ37° = 0,602, συν37° = 0,799).



(α) Να γράψετε, με σημείο αναφοράς το Α(0, 0), τις εξισώσεις κίνησης x = f(t) και y = f(t) για το βλήμα, στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων (S.I.).

(β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Δ.

(γ) Να εξηγήσετε αν το βλήμα συναντά το έδαφος στο Δ κατά την άνοδό του ή την κάθοδό του ή αν το βλήμα στο σημείο Δ βρίσκεται στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς του.

Λύση

(α) Εξίσωση κίνησης στο x άξονα: $x=(u_0\sigma\upsilon\nu\theta)t \Rightarrow x=240t$, μονάδες στο S.I. ***(1 μον.)***

Εξίσωση κίνησης στο y άξονα: $y=(u_0\eta\mu\theta)t-\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y=181t-5t^2$, μονάδες στο S.I. ***(2 μον.)***

(β) Στο σημείο Δ, $\varepsilon\varphi\varphi=\frac{y}{x-320} \Rightarrow \varepsilon\varphi 45^0=\frac{y}{x-320} \Rightarrow y=x-320$. ***(4 μον.)***

Άρα,

$181t-5t^2=240t-320 \Rightarrow 5t^2+59t-320=0$. Άρα,

$$t=\frac{-59\pm\sqrt{3481+6400}}{10}=\frac{-59\pm 99,40}{10} \Rightarrow t=4,04\,s.$$

Έτσι, στο Δ, $x=970\,m$, $x=650\,m$. ***(4 μον.)***

(γ) Υπολογίζουμε την κατακόρυφη ταχύτητα στο Δ.

$u_y=u_0\eta\mu\theta-gt \Rightarrow u_y=181-10(4,04)=+141\,m/s$.

Εφόσον η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας στο Δ είναι θετική, το βλήμα συναντά το έδαφος στο Δ κατά την άνοδό του. ***(3 μον.)***

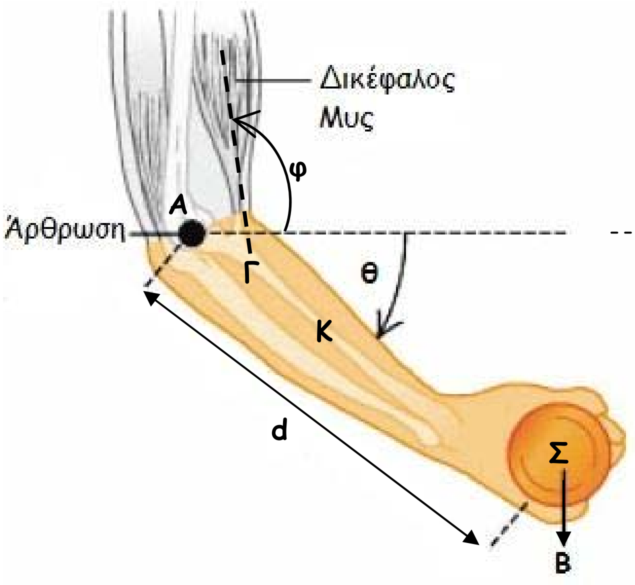
Πρόβλημα - 6 **(15 μονάδες)**

Ένας αθλητής κρατά στο ένα του χέρι ένα σώμα Σ βάρους Β = 75,0 Ν. Το βάρος του χεριού του αθλητή (από την άρθρωση μέχρι τα άκρα) είναι 21,6 Ν και το κέντρο βάρους βρίσκεται στο σημείο Κ σε απόσταση 16 cm από το σημείο Α της άρθρωσης. Η απόσταση του σώματος Σ από το σημείο Α είναι d = 38 cm. Ο δικέφαλος μυς ασκεί δύναμη στο σημείο Γ του αντιβραχίονα το οποίο απέχει απόσταση 5,50 cm από το σημείο Α της άρθρωσης. Η διεύθυνση της δύναμης αυτής σχηματίζει γωνία $\varphi = 100^0$ με τον οριζόντιο άξονα.

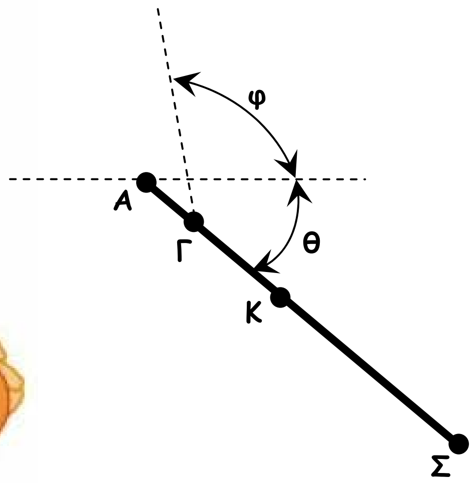
Ο αθλητής κρατά το σώμα Σ σε στατική ισορροπία όταν ο αντιβραχίονας σχηματίζει γωνία $\theta = 40^0$, κάτω από τον οριζόντιο άξονα, όπως δείχνει το σχήμα 1. Το σχήμα 2 δείχνει διαγραμματικά τα σημεία στα οποία ασκούνται οι δυνάμεις στον αντιβραχίονα του χεριού.

(Το κέντρο βάρους του σώματος Σ και τα σημεία Κ, Γ και Α είναι στην ίδια ευθεία).

(Δίνεται: ημ40° = 0,643, συν40° = 0,766 και ημ10^0 = 0,174, συν10^0 = 0,985).



Σχήμα 1



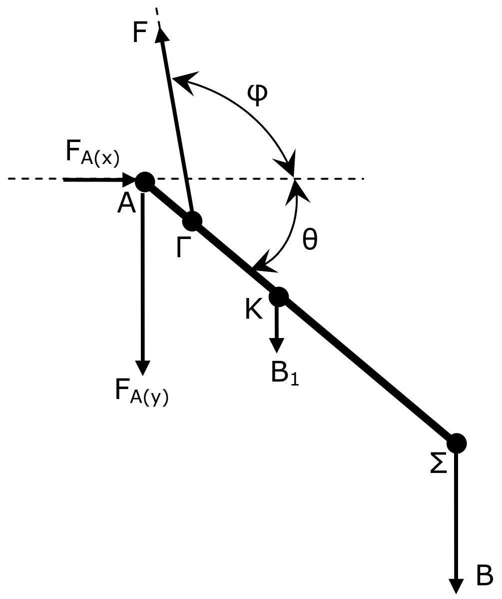
Σχήμα 2

(α) Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που ασκεί ο δικέφαλος μυς στον αντιβραχίονα του χεριού.

(β) Να υπολογίσετε τη δύναμη (μέτρο, διεύθυνση και φορά) που ασκεί η άρθρωση στον αντιβραχίονα του χεριού.

Λύση

(α) Το διάγραμμα δείχνει τις δυνάμεις που ασκούνται στο χέρι. ***(2 μον.)***



Το άθροισμα των ροπών ως προς το σημείο Α, όταν το χέρι σχηματίζει γωνία θ με τον οριζόντιο άξονα, είναι μηδέν. Άρα,

$$F(\mathrm{A\Gamma})\eta\mu\theta = \mathrm{B}_1(\mathrm{AK})\sigma\upsilon\nu\theta + \mathrm{B}d\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\Rightarrow F = \frac{B_1(AK)\sigma\upsilon\nu\theta + Bd\sigma\upsilon\nu\theta}{(\mathrm{A\Gamma})\eta\mu\theta} = \frac{21,6\cdot 0,16\cdot 0,766 + 75\cdot 0,38\cdot 0,766}{0,055\cdot 0,643} = 692\,\mathrm{N}$$. ***(6 μον.)***

(**Σημείωση**: Η δύναμη F σχηματίζει γωνία 40^0 με τη διεύθυνση ΑΣ).

(β) Το άθροισμα των δυνάμεων στον οριζόντιο άξονα είναι μηδέν. Άρα,

$F_{A(x)} = F_x \Rightarrow F_{A(x)} = F\eta\mu 10^0 = 692\cdot 0,174 = 120\,\mathrm{N}$, προς τα δεξιά. ***(2 μον.)***

Το άθροισμα των δυνάμεων στον κατακόρυφο άξονα είναι μηδέν. Άρα,

$F_y = F_{A(y)} + B_1 + B \Rightarrow F_{A(y)} = F\sigma\upsilon\nu 10^0 - B_1 - B$

$\Rightarrow F_{A(y)} = 692\cdot 0,985 - 21,6 - 75 = 585\,\mathrm{N}$, προς τα κάτω. ***(2 μον.)***

Άρα, το μέτρο της δύναμης στην άρθρωση είναι

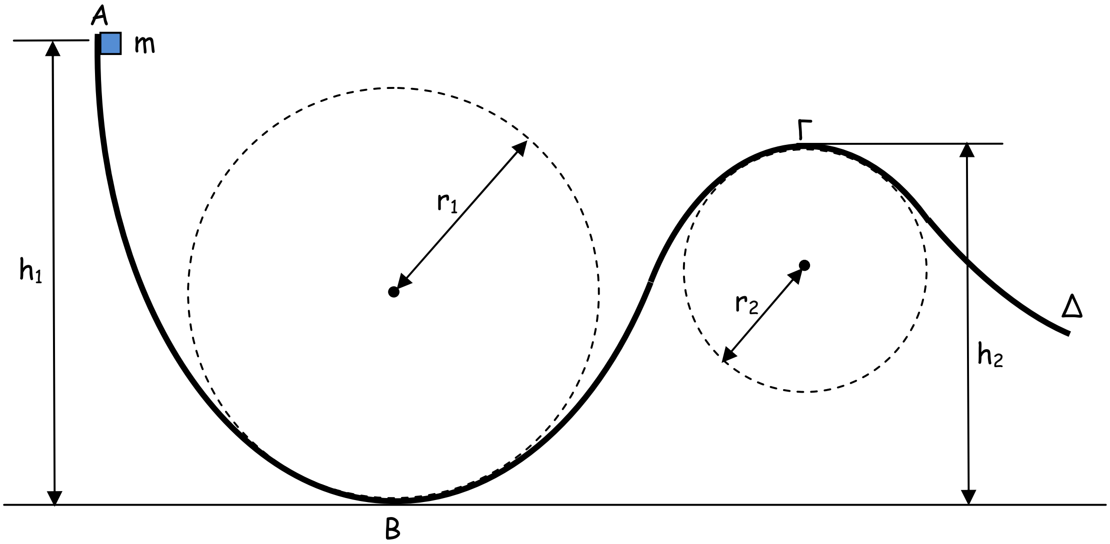
$F_A = \sqrt{F_{A(x)}^2 + F_{A(y)}^2} = \sqrt{120^2 + 585^2} = 597\,\mathrm{N}$. ***(2 μον.)***

Η γωνία που σχηματίζει η δύναμη στην άρθρωση με τον οριζόντιο άξονα είναι ίση με

$\mathrm{T}o\xi\varepsilon\varphi(\frac{F_{A(y)}}{F_{A(x)}}) = \mathrm{T}o\xi\varepsilon\varphi(\frac{585}{120}) = 78^0$, κάτω από τον οριζόντιο άξονα. ***(1 μον.)***

Πρόβλημα - 7 **(15 μονάδες)**

Ένα σώμα μάζας m = 2 kg (θεωρήστε το σώμα ως υλικό σημείο) αφήνεται από την ηρεμία να κινηθεί από το σημείο Α, από ύψος h_1 = 3,6 m, σε μεταλλική τροχιά η οποία βρίσκεται σε κατακόρυφο επίπεδο. Σε όλο το μήκος της τροχιάς υπάρχει τριβή μεταξύ του σώματος και της επιφάνειας της τροχιάς. Θεωρήστε ότι η τριβή ολίσθησης έχει σταθερό μέτρο 2 N σε όλη την κίνηση του σώματος από το σημείο Α μέχρι το σημείο Δ. Δύο τμήματα της τροχιάς είναι κυκλικά τόξα με ακτίνες r_1 και r_2 αντίστοιχα, όπως δείχνει το σχήμα. Το μήκος της τροχιάς ΑΒ είναι 4,0 m και το μήκος της τροχιάς ΒΓ είναι 3,5 m. Η κατακόρυφη απόσταση των σημείων Β, Γ είναι h_2 = 2,4 m.
Η αντίσταση του αέρα να θεωρηθεί αμελητέα.



(α) Στο χαμηλότερο σημείο Β του πρώτου κυκλικού τόξου το σώμα δέχεται κάθετη δύναμη από την επιφάνεια της τροχιάς μέτρου 5mg. Να αποδείξετε ότι $r_1 = \frac{u_B^2}{4g}$, όπου u_B είναι το μέτρο της ταχύτητας του σώματος στο σημείο Β και g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας.

(β) Να υπολογίσετε το μήκος της ακτίνας r_1.

(γ) Να δείξετε ότι στο σημείο Γ το σώμα δεν χάνει επαφή με την τροχιά αν το μέτρο της ταχύτητας του σώματος στο Γ ικανοποιεί τη σχέση $u_\Gamma < \sqrt{r_2 g}$.

(δ) Να υπολογίσετε την ελάχιστη ακτίνα r_2 ώστε το σώμα να μην χάνει επαφή με την τροχιά σε κανένα σημείο του δεύτερου κυκλικού τόξου, παρά μόνο στιγμιαία στο σημείο Γ.

Λύση

(α) Η συνισταμένη δύναμη στο σώμα στο σημείο Β είναι κεντρομόλος δύναμη. Άρα,

$N - mg = m\dfrac{u_B^2}{r_1}$. ***(1 μον.)***

Δίνεται ότι $N = 5mg$. Άρα, $5mg - mg = m\dfrac{u_B^2}{r_1} \Rightarrow 4mg = m\dfrac{u_B^2}{r_1} \Rightarrow r_1 = \dfrac{u_B^2}{4g}$. ***(1 μον.)***

(β) Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου – κινητικής ενέργειας από το Α στο Β:

$-Ts + mgh_1 = \dfrac{1}{2}mu_B^2$. ***(3 μον.)***

$\Rightarrow -8 + 72 = u_B^2 \Rightarrow u_B = 8\,m/s.$ Άρα, $r_1 = \dfrac{64}{40} = 1{,}6\,m$. ***(1 μον.)***

(γ) Η συνισταμένη δύναμη στο σώμα στο σημείο Γ είναι κεντρομόλος δύναμη. Άρα,

$mg - N_\Gamma = m\dfrac{u_\Gamma^2}{r_2} \Rightarrow N_\Gamma = m(g - \dfrac{u_\Gamma^2}{r_2})$. ***(1 μον.)***

Το σώμα δεν χάνει επαφή με την τροχιά αν $N_\Gamma > 0$. ***(2 μον.)***

Άρα,

$g - \dfrac{u_\Gamma^2}{r_2} > 0 \Rightarrow \dfrac{u_\Gamma^2}{r_2} < g \Rightarrow u_\Gamma^2 < r_2 g \Rightarrow u_\Gamma < \sqrt{r_2 g}$. ***(1 μον.)***

(δ) Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου – κινητικής ενέργειας από το Β στο Γ:

$-Ts - mgh_2 = \dfrac{1}{2}mu_\Gamma^2 - \dfrac{1}{2}mu_B^2$. ***(3 μον.)***

$\Rightarrow -7 - 48 = u_\Gamma^2 - 64 \Rightarrow u_\Gamma = 3\,m/s.$ ***(1 μον.)***

Άρα, $\sqrt{r_2 g} > u_\Gamma \Rightarrow 10r_2 > 9 \Rightarrow r_{2(\min)} = 0{,}9\,m$. ***(1 μον.)***

Πρόβλημα - 8 (20 μονάδες)

(α) Θεωρήστε τους πλανήτες του ηλιακού μας συστήματος να διαγράφουν κυκλικές τροχιές γύρω από τον Ήλιο, με ακτίνα τροχιάς r και περίοδο T. Ο πίνακας δείχνει τις τιμές των ακτίνων r και των αντίστοιχων περιόδων T, τεσσάρων πλανητών.

Πλανήτης	r ($\times 10^{11}$ m)	T ($\times 10^{7}$ sec)
Ερμής	0,580	0,760
Αφροδίτη	1,08	1,95
Γη	1,49	3,15
Άρης	2,28	5,94

(i) Να χρησιμοποιήσετε τα δεδομένα του πίνακα για να χαράξετε, σε βαθμολογημένους άξονες, τη γραφική παράσταση $T^2 = f(r^3)$, δηλαδή το τετράγωνο της περιόδου (T^2) σε συνάρτηση με την τρίτη δύναμη της ακτίνας της τροχιάς (r^3).

(ii) Να εξηγήσετε πώς από τη γραφική παράσταση $T^2 = f(r^3)$ που σχεδιάσατε επαληθεύεται ότι «Η περίοδος των πλανητών στο τετράγωνο είναι ανάλογη της τρίτης δύναμης της ακτίνας των κυκλικών τροχιών τους γύρω από τον Ήλιο».

(β) (i) Να αποδείξετε τη σχέση που δίνει τη συνάρτηση $T = f(r)$, με δεδομένα τη μάζα του Ήλιου, M_H, και τη σταθερά της παγκόσμιας έλξης G.

(ii) Να υπολογίσετε τη μάζα του Ήλιου, M_H, χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση που χαράξατε στο ερώτημα (α) και την τιμή της παγκόσμιας σταθεράς G, η οποία δίνεται στην πρώτη σελίδα του δοκιμίου.

(iii) Η απόσταση της Σελήνης από τη Γη είναι $3{,}8 \times 10^5$ km. Η περίοδος της Σελήνης γύρω από τη Γη είναι 27,3 μέρες.

Να υπολογίσετε το λόγο $\dfrac{M_{\mathrm{H}}}{M_{\Gamma}}$, όπου M_{Γ} είναι η μάζα της Γης και M_{H} είναι η μάζα του Ήλιου.

(Θεωρήστε ότι η τροχιά της Σελήνης γύρω από τη Γη είναι κυκλική).

Λύση

(i) Από τις δεδομένες τιμές για την ακτίνα και την περίοδο συμπληρώνουμε τον πιο κάτω πίνακα. ***(1 μον.)***

Πλανήτης	**r^3 ($x10^{33}$ m^3)**	**T^2 ($x10^{14}$ sec^2)**
Ερμής	0,195	0,578
Αφροδίτη	1,26	3,80
Γη	3,31	9,92
Άρης	11,9	35,3

Από τις τιμές του πίνακα αυτού χαράσσομαι τη γραφική παράσταση $T^2 = f(r^3)$. ***(5 μον.)***

(ii) Η γραφική παράσταση $T^2 = f(r^3)$ είναι ευθεία γραμμή που περνά από το (0, 0). Άρα, η περίοδος στο τετράγωνο είναι ανάλογη της τρίτης δύναμης της ακτίνας της τροχιάς. ***(1 μον.)***

(β) (i) Η εξίσωση για την κυκλική κίνηση ενός πλανήτη μάζας M_π γύρω από τον Ήλιο μάζας M_H, είναι $\Sigma F = M_\pi a_k \Rightarrow G\frac{M_H M_\pi}{r^2} = M_\pi \omega^2 r$. ***(2 μον.)***

Είναι $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Άρα,

$$G\frac{M_H M_\pi}{r^2} = M_\pi \frac{4\pi^2}{T^2} r \Rightarrow T^2 G M_H = 4\pi^2 r^3 \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_H} r^3.$$ ***(1 μον.)***

(ii) Υπολογίζουμε την κλίση λ της γραφικής παράστασης. Είναι,

$\lambda = \frac{(\mathrm{B\Gamma})}{(\mathrm{A\Gamma})} = \frac{17,0x10^{14}}{5,75x10^{33}} s^2 \cdot m^{-3}$. ***(2 μον.)***

Από την εξίσωση $T^2 = f(r^3)$, η κλίση είναι ίση με $\frac{4\pi^2}{GM_H}$. ***(3 μον.)***

Άρα, $\frac{4\pi^2}{GM_H} = \frac{17,0x10^{14}}{5,75x10^{33}} s^2 \cdot m^{-3}$. Αντικαθιστούμε την τιμή της παγκόσμιας σταθεράς,

$$\frac{4\pi^2}{6,673x10^{-11} M_H} = \frac{17,0x10^{14}}{5,75x10^{33}} \Rightarrow M_H = 2,00x10^{30}\ kg.$$

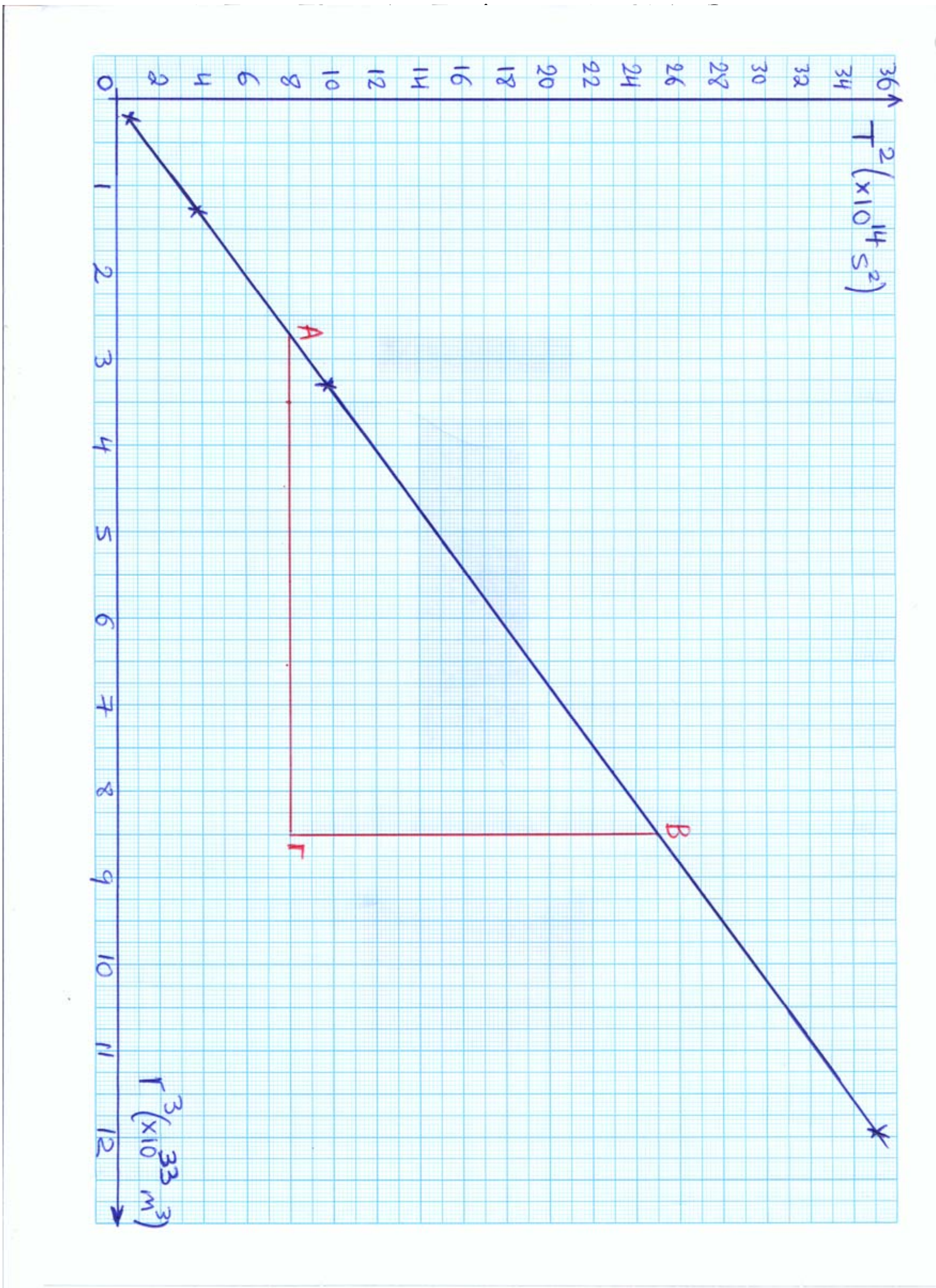
Άρα, $M_H = 2,00x10^{30}\ kg$. ***(1 μον.)***

<u>Αποδεκτές τιμές</u>: $1,96x10^{30}\ kg \le M_H \le 2,04x10^{30}\ kg$.

(iii) Για την κυκλική κίνηση της Σελήνης έχουμε, $T_\Sigma^2 = \frac{4\pi^2}{GM_\Gamma} r_\Sigma^3$. ***(1 μον.)***

Για την κυκλική κίνηση της Γης έχουμε, $T_\Gamma^2 = \frac{4\pi^2}{GM_H} r_\Gamma^3$. ***(1 μον.)***

Άρα, $\frac{M_H}{M_\Gamma} = (\frac{r_\Gamma}{r_\Sigma})^3 (\frac{T_\Sigma}{T_\Gamma})^2$. Άρα, $\frac{M_H}{M_\Gamma} = (\frac{1,49x10^8}{3,8x10^5})^3 (\frac{27,3}{365})^2 = 3,4x10^5$. ***(2 μον.)***


T^2 (x10^14 s^2)
r^3 (x10^33 m^3)
A
B
Γ