ΕΝΩΣΗ ΚΥΠΡΙΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ

28 Η ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ (Πρώτη Φάση)

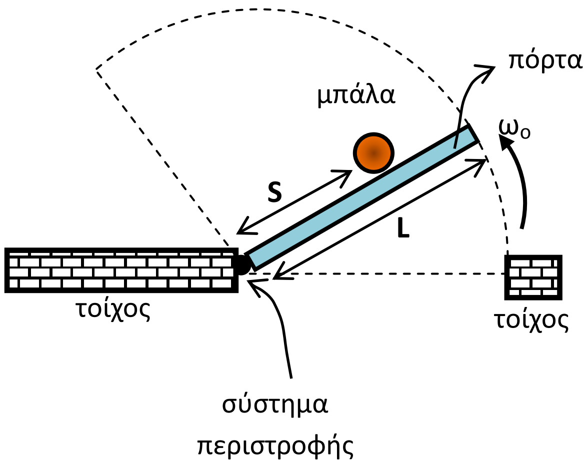
Κυριακή, 15 Δεκεμβρίου, 2013

Ώρα: 10:00 - 13:00

Προτεινόμενες Λύσεις

ΘΕΜΑ 1°: (Μονάδες 15)

Η πόρτα μάζας M = 3m και πλάτους L μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές με τη βοήθεια συστήματος περιστροφής. Μια μπάλα του bowling μάζας m βρίσκεται ακίνητη στο λείο πάτωμα και σε απόσταση s από το σημείο περιστροφής όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα (κάτοψη). Η πόρτα καθώς περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_o συγκρούεται ελαστικά με την μπάλα με αποτέλεσμα η μπάλα να κινείται χωρίς να περιστρέφεται ενώ η πόρτα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_1.



Η ροπή αδράνειας της πόρτας είναι $I_\pi = ⅓ ML^2$ και ο χρόνος της κρούσης αμελητέος.

α. Να αναφέρετε ποιες αρχές της φυσικής ισχύουν.

(μον. 2)

β. Να υπολογίσετε:

i. την ταχύτητα της μπάλας μετά την κρούση σε σχέση μόνο των s, L και ω_o.

(μον. 8)

ii. την απόσταση s, συναρτήσει μόνο του L, ώστε η μπάλα να κινείται με μέγιστη ταχύτητα.

(μον. 5)

Λύση

α. Η κρούση είναι ελαστική άρα εφαρμόζεται η Αρχή Διατήρησης της Κινητικής Ενέργειας (μον. 1)

και η Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής (μον. 1)

- Από την Αρχή Διατήρηση της Κινητικής Ενέργειας

$$E_{αρχ} = E_{τελ}$$
$$E_{κιν.περ} = E'_{κιν} + E'_{κιν.περ}$$
$$½ .I.\omega_o^2 = ½\, mu^2 + ½ .I.\omega_1^2$$
$$½ .⅓ML^2.\omega_o^2 = ½\, mu^2 + ½ .⅓ML^2.\omega_1^2$$
$$½ .⅓.3m.L^2.\omega_o^2 = ½\, mu^2 + ½ .⅓.3mL^2.\omega_1^2 \qquad \text{(μον. 1)}$$
$$L^2.\omega_o^2 = u^2 + L^2.\omega_1^2$$
$$L^2.\omega_o^2 - L^2.\omega_1^2 = u^2$$
$$L^2.(\omega_o^2 - \omega_1^2) = u^2$$
$$L^2.(\omega_o - \omega_1).(\omega_o + \omega_1) = u^2 \qquad εξ.1 \qquad \text{(μον. 1)}$$

- Από την Αρχή διατήρηση της στροφορμής

$$L_{αρχ} = L_{τελ}$$
$$L_{πόρτα} = L'_{πόρτα} + L'_{μπάλας}$$
$$I.\omega_o = I.\omega_1 + m.u.s$$
$$⅓ML^2.\omega_o = ⅓ML^2.\omega_1 + m.u.s$$
$$⅓.3m.L^2.\omega_o = ⅓.3m.L^2.\omega_1 + m.u.s \qquad \text{(μον. 1)}$$
$$L^2.\omega_o = L^2.\omega_1 + u.s$$
$$L^2(\omega_o - \omega_1) = u.s \qquad εξ.2 \qquad \text{(μον. 1)}$$

- Διαιρώ την εξ.1 / εξ.2

$$L^2.(\omega_o - \omega_1).(\omega_o + \omega_1) = u^2 \qquad εξ.1$$
$$L^2(\omega_o - \omega_1) = u.s \qquad εξ.2$$
$$(\omega_o + \omega_1) = \frac{u}{s} \rightarrow \omega_1 = \frac{u}{s} - \omega_o \qquad εξ.3 \qquad \text{(μον. 1)}$$

- Αντικατάσταση της εξίσωσης 3 στην εξίσωση 2

$$\left.\begin{aligned} L^2(\omega_o - \omega_1) &= u.s \\ \omega_1 &= \frac{u}{s} - \omega_o \end{aligned}\right\}$$

$$L^2\left(\omega_o - \frac{u}{s} + \omega_o\right) = u.s \qquad \text{(μον. 1)}$$

$$L^2\left(2\omega_o - \frac{u}{s}\right) = u.s$$

$$2.L^2.\omega_o - \frac{L^2u}{s} = u.s$$

$$2.L^2.\omega_o = u.s + \frac{L^2u}{s}$$

$$2.L^2.\omega_o = u.(s + \frac{L^2}{s})$$

$$2.L^2.\omega_o = u.(\frac{s^2+L^2}{s})$$

$$u = \frac{2sL^2\omega_0}{s^2+L^2}$$ (μον. 2)

ii.

- Για να κινείται η πόρτα με μέγιστη ταχύτητα η κινητική Ενέργεια περιστροφής της πόρτας μετά την κρούση μηδενίζεται. (μον. 1)

$$E_{αρχ} = E_{τελ}$$

$$E_{κιν.περ} = E'_{κιν}$$

$$½ .I.\omega_o^2 = ½ m.u_{max}^2$$

$$½ .⅓ML^2.\omega_o^2 = ½ m.u_{max}^2$$

$$½ .⅓.3m.L^2.\omega_o^2 = ½ m.u_{max}^2$$

$$L^2.\omega_o^2 = u_{max}^2$$ εξ.1 (μον. 1)

- Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής

$$L_{αρχ} = L_{τελ}$$

$$L_{πόρτα} = L'_{μπάλας}$$

$$I.\omega_o = m.u_{max}.s$$

$$⅓ML^2.\omega_o = m.u_{max}.s$$

$$⅓.3m.L^2.\omega_o = m.u_{max}.s$$

$$L^2.\omega_o = u_{max}.s$$ εξ.2 (μον. 1)

- Διαιρώ τις εξισώσεις εξ.1/εξ.2

$$\frac{L^2.\omega_o^2 = u_{max}^2}{L^2.\omega_o = u_{max}.s}$$

$$\omega_o = \frac{u_{max}}{s}$$ εξ.3 (μον. 1)

- Αντικαταστώ την εξίσωσή 3 στην εξίσωση 2

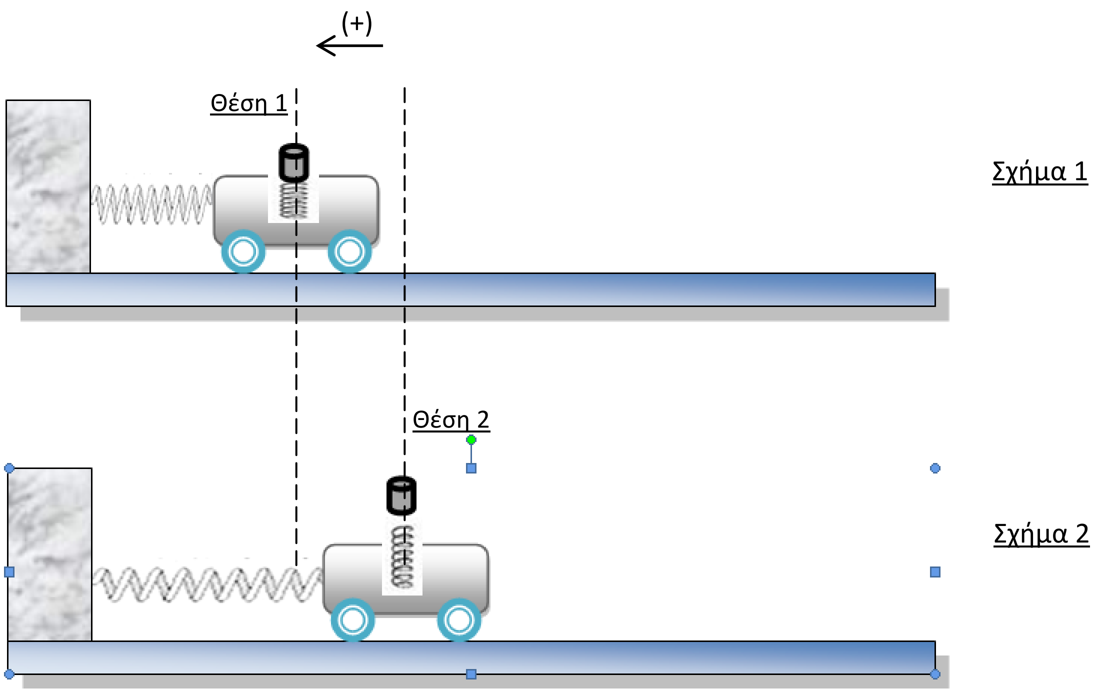
$$\left.\begin{array}{l} L^2.\omega_o = u_{max}.s \\ \omega_o = \dfrac{u_{max}}{s} \end{array}\right\}$$

$$L^2 \cdot \frac{u_{max}}{s} = u_{max} \cdot s \rightarrow L^2 = s^2 \rightarrow L = s \qquad \text{(μον. 1)}$$

ΘΕΜΑ 2ο: (Μονάδες 25)

Ένα αμάξι μάζας M= 1,800 kg διαθέτει μηχανισμό συσπειρωμένου αβαρούς ελατηρίου σταθεράς k_2, ο οποίος έχει τη δυνατότητα να εκτινάξει (σε ελάχιστο χρονικό διάστημα) κατακόρυφα προς τα πάνω ένα μικρό σώμα μάζας m= 0,200 kg το οποίο βρίσκεται ήδη πάνω στο αμάξι. Το αμάξι είναι διαρκώς συνδεδεμένο με το ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k= 200 N/m και το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα συνδεδεμένο σε ένα τοίχο. Θεωρείστε ότι ανάμεσα στο αμάξι και το οριζόντιο επίπεδο δεν υπάρχουν τριβές και η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

Συμπιέζουμε το οριζόντιο ελατήριο κατά 0,2 m προς τ΄ αριστερά, στη θέση 1 (σχήμα 1) και τη στιγμή t_0 = 0s αφήνουμε το σύστημα των δύο μαζών ελεύθερο να κινηθεί.



Να υπολογίσετε:

Α) Την περίοδο της ταλάντωσης, **(μον. 1)**

Β) Το πλάτος της ταλάντωσης, **(μον. 1)**

Γ) Την αρχική φάση της ταλάντωσης, **(μον. 1)**

Δ) Την ενέργεια της ταλάντωσης, **(μον. 1)**

Ε) Την ταχύτητα του συστήματος όταν αυτό περνά από τη θέση ισορροπίας, **(μον. 1)**

ΣΤ) Την εξίσωση της ταχύτητας για το χρονικό διάστημα 0≤ t ≤T/2. **(μον. 2)**

Τη στιγμή t_1 = 0,1π s, όπου το σύστημα βρίσκεται στη θέση 2 (σχήμα 2), το σώμα μάζας m εκτοξεύεται προς τα πάνω (μέσω του μηχανισμού συσπειρωμένου αβαρούς ελατηρίου σταθεράς k_2).

Η) Να δικαιολογήσετε γιατί το σώμα μάζας m θα κάνει κατακόρυφη βολή προς τα πάνω. **(μον. 2)**

Θ) Ποια χρονική στιγμή t_2 το αμάξι μάζας Μ θα επιστρέψει στη θέση 2; **(μον. 2)**

Ι) Με πόση ταχύτητα περνά από τη θέση ισορροπίας το αμάξι μάζας Μ καθώς κινείται μεταξύ των στιγμών t_1 και t_2; **(μον. 1)**

Κ) Να γίνει σε βαθμονομημένους άξονες, η γραφική παράσταση της ταχύτητας του αμαξιού ως προς το χρόνο για το χρονικό διάστημα 0≤ t ≤t_2. **(μον. 4)**

Λ) Να γίνει σε βαθμονομημένους άξονες, η γραφική παράσταση της συνισταμένης δύναμης που ασκείται στο αμάξι ως προς το χρόνο για το χρονικό διάστημα 0≤ t ≤0,1475π s. **(μον. 4)**

Μ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της προηγούμενης γραφικής παράστασης για το χρονικό διάστημα 0,05π≤ t ≤0,1475π s. **(μον. 5)**

Λύση

Α). $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_{o\lambda}}{K}}$, $(\mu o\nu. 0{,}5)$, $= 2\pi\sqrt{\frac{2}{200}} = \frac{2\pi}{10}$ =0,2π s. (μον. 0,5)

Β). $x_0 = 0{,}2\, m.\ (\mu o\nu. 1)$

Γ). $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ rad (όταν η εξίσωση της ταλάντωσης είναι x=x_0ημ(ωt+φ_0)

Ή $\varphi_0 = 0$ (όταν η εξίσωση της ταλάντωσης είναι x=x_0συν(ωt) $(\mu o\nu. 1)$

Δ). $E_{\tau\alpha\lambda} = \frac{1}{2}\, D x_0^2$, $(\mu o\nu. 0{,}5) = \frac{1}{2}\ 200 * 0{,}2^2 = 4J\ (\mu o\nu. 0{,}5)$

Ε).).$u_0 = \omega * x_0$, ή − και $u_0 = \frac{2\pi}{T} * x_0, (\mu o\nu. 0{,}5) =$

$$= \frac{2\pi}{0{,}2\pi} * 0{,}2 = 2\ \frac{m}{s}\ (\mu o\nu. 0{,}5).$$

ΣΤ).).$u \quad = u_0 * \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0), (\mu o\nu. 0{,}5)$

$= \; 2 * \sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right), \qquad (\mu o\nu. 1)$,

$$\left(t \to s, u \to \frac{m}{s},\ \gamma\iota\alpha\ 0 \le t \ \le 0{,}1\pi\ s\right)\ (\mu o\nu. 0{,}5).$$

Η). $E\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \Delta t = t_1 - t_0 = \ 0{,}1\pi - 0 = 0{,}1\pi = \frac{T}{2}, (\mu o\nu. 0{,}5)$

$\tau o\ \sigma\acute{\upsilon}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ \tau\eta\nu\ t_1 \ = \ 0{,}1\pi\ s\ \beta\rho\acute{\iota}\sigma\kappa\varepsilon\tau\alpha\iota\ \sigma\tau o - x_0, \ \ (\mu o\nu. 0{,}5)$

$o\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ o\rho\iota\zeta\acute{o}\nu\tau\iota\alpha\ \tau\alpha\chi\acute{\upsilon}\tau\eta\tau\alpha\ u = 0, (\mu o\nu. 0{,}5)$,

$\acute{\alpha}\rho\alpha\ \tau o\ \sigma\acute{\omega}\mu\alpha\ \mu\acute{\alpha}\zeta\alpha\varsigma\ m\ \theta\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\ \kappa\alpha\tau\alpha\kappa\acute{o}\rho\upsilon\varphi\eta\ \beta o\lambda\acute{\eta}\ \pi\rho o\varsigma\ \tau\alpha\ \pi\acute{\alpha}\nu\omega. (\mu o\nu. 0{,}5)$

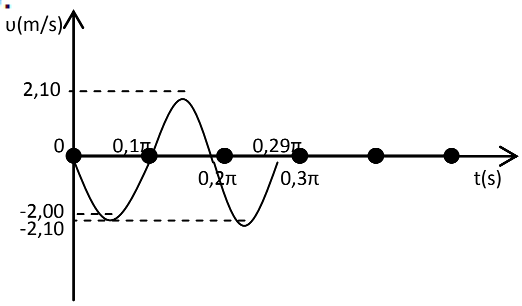
$\Theta). \quad T' \ = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}},\ (\mu o\nu. 0{,}5),\ = \ 2\pi\sqrt{\frac{1{,}8}{200}}$ = 0,19π s. (μον. 0,5)

$o\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ t_2 = \ \ t_1 + \ \ T'\, (\mu o\nu. 0{,}5), \qquad = \ 0{,}1\pi + 0{,}19\pi = 0{,}29\pi\ s \quad (\mu o\nu. 0{,}5)$

$I).u'_0 \ \ = \omega' * x_0, \ \ \acute{\eta} - \kappa\alpha\iota\ \ u'_0 \ \ = \frac{2\pi}{T'} * x_0, (\mu o\nu. 0{,}5) =$

$$= \ \frac{2\pi}{0{,}19\pi} * 0{,}2 = 2{,}1\ \frac{m}{s}\ (\mu o\nu. 0{,}5).$$

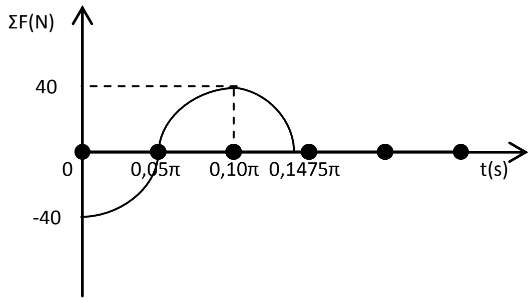
$K).$



$\Lambda). \Sigma F_0 = K * x_0, \ \ (\mu o\nu. 0{,}5), = 200 * 0{,}2 = 40N\ (\mu o\nu. 0{,}5),$

$$0{,}1475\pi = 0{,}1\pi + 0{,}0475\pi = \frac{T}{2} + \frac{T'}{4} \ \ (\mu o\nu. 0{,}5),$$

(σχέδιο μον. 2,5)



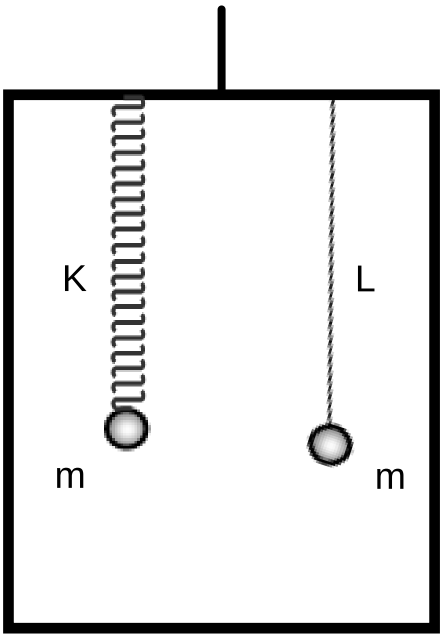
$M).\ Εμβαδόν = ΔP\ \ (μον.1),$

$$= P_{τελ} - P_{αρχ}\,(μον.1), \qquad = M * u'_0 - \left(M * (-u_0)\right)(μον.1),$$

$$= M * \left(u'_0 + u_0\right)(μον.1),$$

$$= 1{,}8 * (2{,}1 + 2) = 7{,}38\ Ns\ \ (μον.1)$$

<u>ΘΕΜΑ 3ο: (Μονάδες 20)</u>



Α. 1. Ποια ταλάντωση ονομάζεται απλή αρμονική ταλάντωση; **(μον. 2)**

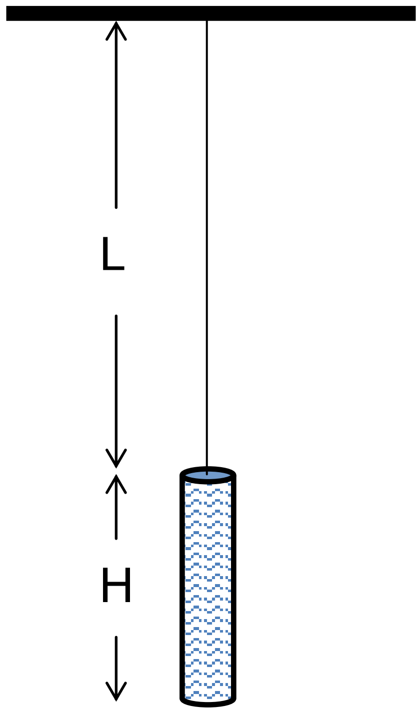
2. Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, η οποία περιγράφεται από την εξίσωση:

x=0,012ημ(0,785t),

(x σε μέτρα και t σε δευτερόλεπτα, π=3,14).

Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες τις γραφικές παραστάσεις σε συνάρτηση με το χρόνο της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας, x=x(t), της ταχύτητας του σώματος, u=u(t), και της επιτάχυνσης του σώματος,α=α(t). **(μον. 6)**

Β. Από την οροφή ενός ανελκυστήρα έχουν αναρτηθεί δύο ταλαντωτές: ένα ελατήριο στο οποίο έχει αναρτηθεί μια μάζα m και ένα απλό εκκρεμές. Η σταθερά του ελατηρίου είναι K=10 N/m και το μήκος του νήματος είναι L=0,60 m. Τα σώματα στο ελατήριο και στο απλό εκκρεμές έχουν την ίδια μάζα, m=0,4 Kg. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g=9,81 m/s^2. Να εξηγήσετε με ποιο τρόπο θα πρέπει να κινείται ο ανελκυστήρας, έτσι ώστε οι δύο ταλαντωτές να έχουν την ίδια περίοδο ταλάντωσης.
(μον. 5)



Γ. Στο άκρο νήματος μήκους L κρέμεται ένα κυλινδρικό δοχείο ύψους H. Το δοχείο είναι γεμάτο με νερό. Οι δύο βάσεις του κυλίνδρου έχουν από μια μικρή τρύπα. Οι τρύπες είναι κλειστές με πώματα. Εκτρέπουμε λίγο το σώμα από τη θέση ισορροπίας και αφαιρώντας τα πώματα αφήνουμε το σώμα να εκτελέσει ταλάντωση. Θεωρούμε ότι το σύστημα συμπεριφέρεται ως απλό εκκρεμές. Η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

1. Ποια είναι η περίοδος ταλάντωσης του σώματος μόλις το ελευθερώσαμε; **(μον. 2)**

2. Ποια θα είναι η περίοδος ταλάντωσης του σώματος όταν όλο το νερό θα έχει χυθεί από τον κύλινδρο; **(μον. 2)**

3. Να περιγράψετε τις μεταβολές (αν υπάρχουν) στην περίοδο ταλάντωσης του σώματος από την έναρξη της ταλάντωσης μέχρι τη στιγμή που ο κύλινδρος θα αδειάσει από το νερό. **(μον. 3)**

<u>Λύση</u>

Α. 1. Απλή αρμονική ταλάντωση ονομάζεται η ταλάντωση, για την οποία η απομάκρυνση του κινητού από τη θέση ισορροπίας είναι ημιτονοειδής ή συνημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου. (μον. 2)

2. Από την εξίσωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης $x = x_0 \cdot \eta\mu\omega t$ προκύπτει ότι η συγκεκριμένη ταλάντωση έχει πλάτος $x_0 = 0{,}012\ \mathrm{m}$ και περίοδο $T = 8{,}00\mathrm{s}$.

Η εξίσωση της ταχύτητας θα είναι $u = \frac{dx}{dt} = x_0\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega t$

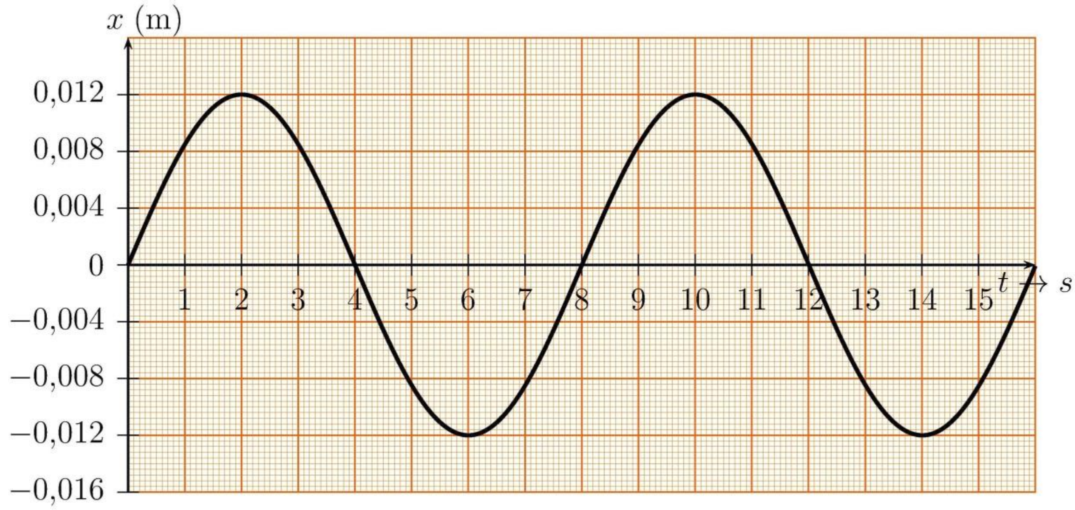
Άρα $u_0 = x_0\omega = 0{,}012 \cdot 0{,}785 = 9{,}42 \cdot 10^{-3}\mathrm{m/s}$.

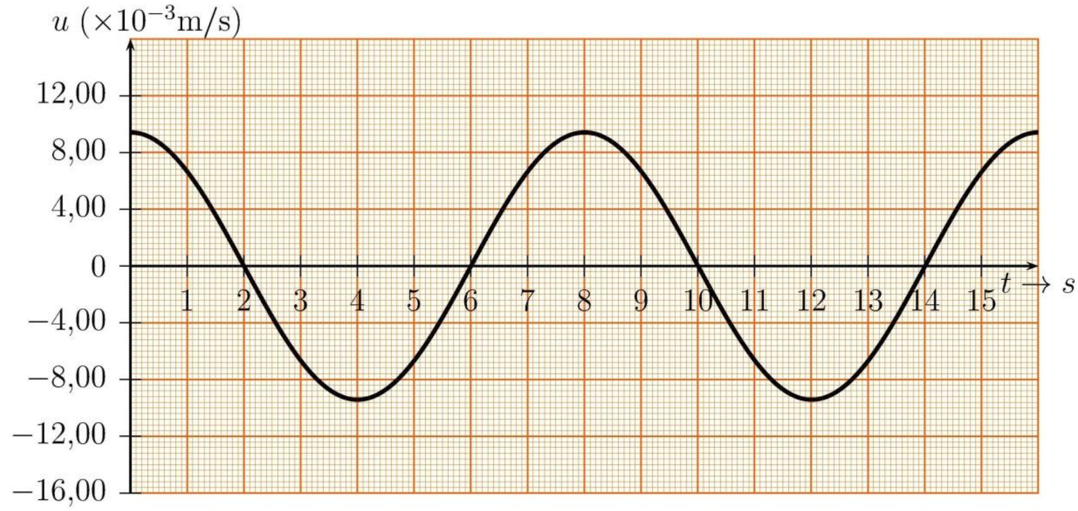
Η εξίσωση της επιτάχυνσης είναι $a = \frac{du}{dt} = -x_0\omega^2 \cdot \eta\mu\omega t$.

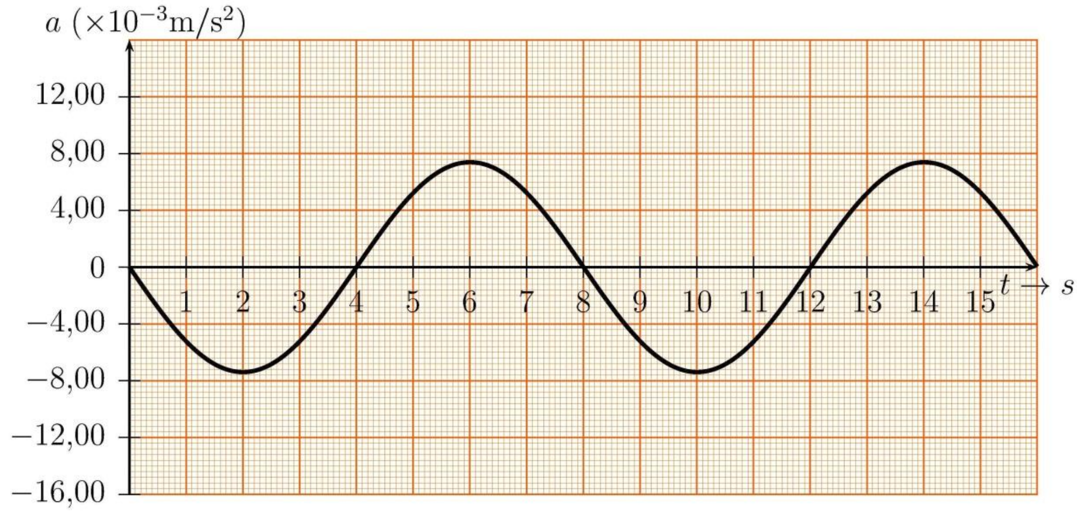
Άρα $a_0 = x_0\omega^2 = 0{,}012 \cdot 0{,}785^2 = 7{,}39 \cdot 10^{-3}\mathrm{m/s^2}$. (μον. 3)

Οι γραφικές παραστάσεις $x = x(t)$, $u = u(t)$ και $a = a(t)$ φαίνονται πιο κάτω:

(μον. 3)


x (m)
0,012
0,008
0,004
0
−0,004
−0,008
−0,012
−0,016
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
$t \to s$


u ($\times 10^{-3}$m/s)
12,00
8,00
4,00
0
−4,00
−8,00
−12,00
−16,00
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
$t \to s$


a ($\times 10^{-3}$m/s^2)
12,00
8,00
4,00
0
−4,00
−8,00
−12,00
−16,00
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
$t \to s$

Β. Η περίοδος ταλάντωσης κάθε ταλαντωτή, όταν ο ανελκυστήρας είναι ακίνητος, είναι ίση με:

$$T_{\varepsilon\lambda\alpha\tau.} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}4}{40}} = 0{,}2\pi\ s$$

$$T_{\varepsilon\kappa\kappa\rho\varepsilon\mu.} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}60}{9{,}81}} = 0{,}25\pi\ s$$ (μον.1)

Η περίοδος ταλάντωσης του σώματος στο ελατήριο δε θα αλλάξει από την κίνηση που θα κάνει ο ανελκυστήρας, αφού σε αυτή την περίπτωση η δύναμη επαναφοράς εξαρτάται από την επιπλέον επιμήκυνση του ελατηρίου από τη θέση ισορροπίας.

(μον.1)

Αντίθετα, για το απλό εκκρεμές η δύναμη επαναφοράς είναι ίση με την οριζόντια συνιστώσα της τάσης του νήματος. Η τάση του νήματος είναι ίση σε μέτρο με το βάρος του σώματος, $S = mg$, όταν ο ανελκυστήρας είναι ακίνητος ή κινείται με σταθερή ταχύτητα. Όταν ο ανελκυστήρας έχει επιτάχυνση $\vec{a}$ με φορά προς τα πάνω (δηλαδή, ο ανελκυστήρας επιταχύνεται κινούμενος προς τα πάνω ή επιβραδύνεται κινούμενος προς τα κάτω) η τάση του νήματος θα έχει μέτρο $S = m(g+a)$, ενώ όταν ο ανελκυστήρας έχει επιτάχυνση $\vec{a}$ με φορά προς τα κάτω (δηλαδή, ο ανελκυστήρας επιταχύνεται κινούμενος προς τα κάτω ή επιβραδύνεται κινούμενος προς τα πάνω) η τάση θα είναι $S = m(g-a),\ \ a < g$. Όπως εύκολα αποδεικνύεται, η περίοδος ταλάντωσης του εκκρεμούς σε αυτές τις περιπτώσεις θα είναι $T_{\varepsilon\kappa\kappa\rho\varepsilon\mu.} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g+a}}$ και $T_{\varepsilon\kappa\kappa\rho\varepsilon\mu.} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g-a}}$, αντίστοιχα.

(μον. 1)

Αφού στον ακίνητο ανελκυστήρα η περίοδος του απλού εκκρεμούς ήταν μεγαλύτερη από την περίοδο του σώματος στο ελατήριο, θα πρέπει να επιλέξουμε την κίνηση που θα ελαττώσει την περίοδο του εκκρεμούς. Αυτή είναι η κίνηση, στην οποία η επιτάχυνση έχει φορά προς τα πάνω.

Το μέτρο αυτής της επιτάχυνσης μπορεί να υπολογιστεί εύκολα, όπως φαίνεται πιο κάτω:

$$T_{\varepsilon\lambda\alpha\tau.} = T_{\varepsilon\kappa\kappa\rho\varepsilon\mu.} \Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g+a}} \Rightarrow \frac{m}{K} = \frac{L}{g+a} \Rightarrow a = \frac{LK}{m} - g$$

$$a = \frac{0{,}60 \cdot 10}{0{,}4} - 9{,}81 = 15 - 9{,}81 = 5{,}19\ \mathrm{m/s^2}$$

(μον. 2)

Γ.

1. Αρχικά το κέντρο βάρους του κυλίνδρου με το νερό βρίσκεται στο μέσο του κυλίνδρου. Άρα το σώμα θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο

$$T_{\alpha\rho\chi.} = 2\pi\sqrt{\frac{l + H/2}{g}}$$

(μον. 2)

2. Όταν όλο το νερό χυθεί, το κέντρο βάρους θα είναι και πάλι στο μέσο του κυλίνδρου. Άρα η περίοδος θα είναι και πάλι ίση με
$$T_{\tau\varepsilon\lambda} = 2\pi\sqrt{\frac{l+H/2}{g}}$$ (μον. 2)

3. Όταν το νερό αρχίσει να χύνεται το κέντρο βάρους της στήλης του νερού θα κατεβαίνει μετακινούμενο συνεχώς προς τον πυθμένα του δοχείου. Το κέντρο βάρους του συστήματος αρχικά θα κατεβαίνει και αυτό κάτω από την αρχική του θέση. Στη συνέχεια, όσο ελαττώνεται η μάζα του νερού στο δοχείο το κέντρο βάρους του συστήματος θα ανυψώνεται μέχρι να φθάσει ξανά (όταν χυθεί όλο το νερό) στο κέντρο του κυλίνδρου. (μον. 2)
   Άρα, η περίοδος του εκκρεμούς αρχικά θα αυξάνεται και, αφού φθάσει σε μια μέγιστη τιμή, στη συνέχεια θα ελαττώνεται μέχρι να πάρει την τιμή $T_{\tau\varepsilon\lambda} = T_{\alpha\rho\chi.} = 2\pi\sqrt{\frac{l+H/2}{g}}$.
   (μον. 1)

<u>ΘΕΜΑ 4ο: (Μονάδες 20)</u>

Σανίδα μεγάλου μήκους Σ_2 έχει μάζα M = 9 kg και με τη βοήθεια τροχών, όπως στο σχήμα, μπορεί να κινείται οριζόντια χωρίς τριβές.

Το σώμα Σ_1 μάζας m = 0,9 kg είναι ακίνητο πάνω στη σανίδα και εμφανίζει με αυτή συντελεστή τριβής ολίσθησης μ = 0,4. Το βλήμα μάζας $m_{\beta\lambda.}$ = 0,1 kg κινείται με ταχύτητα v_o = 200 m/s, κατευθυνόμενο στο Σ_1. Αν η κρούση του βλήματος με το Σ_1 είναι πλαστική και η διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα χρονικά να βρεθούν:

α. Η κοινή ταχύτητα βλήματος και Σ_1. **(μον. 3)**

β. Η συνολική απώλεια μηχανικής ενέργειας. **(μον. 4)**

γ. Το χρονικό διάστημα από την κρούση μέχρι την απόκτηση κοινής ταχύτητας. **(μον. 6)**

δ. Το διάστημα που διατρέχει το Σ_1 πάνω στο Σ_2 ως προς το έδαφος μέχρι το Σ_1 και Σ_2 να αποκτήσουν κοινή ταχύτητα. **(μον. 7)**

Λύση

(α) Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της ορμής, εφόσον η διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα.

$$m_0 u_0 = (m_0 + m) u_1 \Rightarrow u_1 = 20 \frac{m}{s}$$ (μον. 3)

(β) Το $Σ_1$ μαζί με το βλήμα και το $Σ_2$ αποκτούν κοινή ταχύτητα. Από τη διατήρηση της ορμής έχουμε:

$$m_0 u_0 = (m_0 + m + M) u \Rightarrow u = 2 \frac{m}{s}.$$ (μον. 2,5)

Η αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$E_{αρχ.} = \frac{1}{2} m_0 u_0^2 = 2000\, J.$$ (μον. 0,5)

Η τελική κινητική ενέργεια είναι:

$$E_{τελ.} = \frac{1}{2} (m_0 + m + M) u^2 = 20\, J.$$ (μον. 0,5)

Άρα η απώλεια κινητικής ενέργειας είναι:

$$\Delta E_k = E_{τελ.} - E_{αρχ.} = -1980\, J.$$ (μον. 0,5)

(γ) Υπολογίζουμε πρώτα το μέτρο της τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων $Σ_1$ και $Σ_2$:

$$T = \mu (m_0 + m) g = 4\, N$$ (μον. 2)

Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για το σώμα $Σ_2$, έχουμε:

$$T = M a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{4}{9} m/s^2.$$ (μον. 2)

Έχουμε για το $Σ_2$:

$$u = a_2 (\Delta t) \Rightarrow \Delta t = \frac{2}{4/9} = 4{,}5\, s.$$ (μον. 2)

<u>Σημείωση</u>: Ο χρόνος μπορεί να υπολογιστεί και από την επιτάχυνση του βλήματος και του $Σ_1$:

$T = (m_0 + m) a_1 \Rightarrow a_1 = 4\, m/s^2$. Είναι

$$u = u_1 - a_1 (\Delta t) \Rightarrow \Delta t = 4{,}5\, s.$$

(δ) Η σανίδα μετακινείται ως προς το έδαφος απόσταση ίση με:

$s_2 = \frac{1}{2} a_2 (\Delta t)^2 = 4,5\,m$. (μον. 2,5)

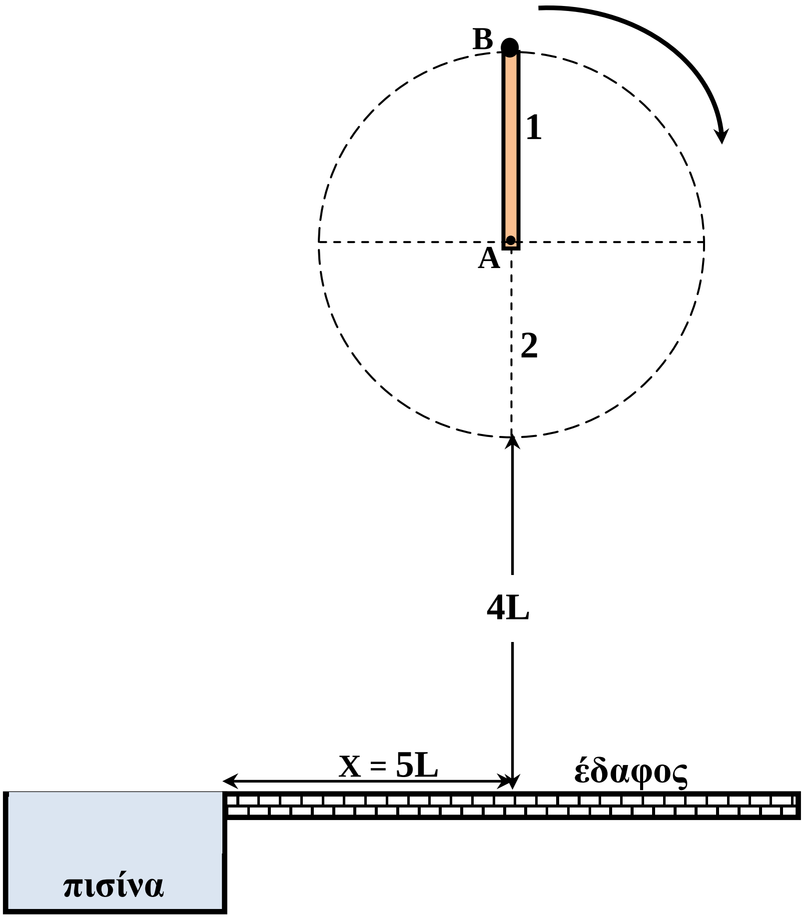
Το σώμα $Σ_1$ μαζί με το βλήμα μετακινήθηκε ως προς το έδαφος:

$s_1 = u_1(\Delta t) - \frac{1}{2} a_1 (\Delta t)^2 = 49,5\,m$ (μον. 2,5)

Άρα το $Σ_1$ μετακινήθηκε ως προς τη σανίδα κατά, $s = s_1 - s_2 = 45\,m$. (μον. 2)

ΘΕΜΑ 5ο: (Μονάδες 20)

Η ομογενής ράβδος ΑΒ έχει μάζα m και μήκος L. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο Α όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η ράβδος αρχικά είναι ακίνητη στην πάνω κατακόρυφη θέση (1). Στο άκρο Β της ράβδου βρίσκεται κολλημένη μικρή σφαίρας μάζας m.



α. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου όταν φτάνει στην κάτω κατακόρυφη θέση (2).

(μον. 6)

β. Να υπολογίσετε τη στροφορμή του συστήματος ράβδου – σφαίρας όταν φτάνει στην θέση 2.

(μον. 2)

Όταν η ράβδος διέρχεται από τη θέση 2 η σφαίρα αποκολλάται από τη ράβδο.

γ. Να διερευνήσετε αν η σφαίρα θα πέσει μέσα την πισίνα.

(μον. 6)

δ. Όταν η σφαίρα αποκολλήθηκε από τη ράβδο αυτή συνεχίζει να περιστρέφεται. Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η ράβδος με την πάνω κατακόρυφη θέση (1) όταν αυτή σταματά στιγμιαία.

(μον. 6)

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου $I_π = ⅓\, mL^2$.

Λύση

α. $E_{αρχ} = E_{τελ}$

$E_{δυν.ραβ} + E_{δυν.σφ} = E'_{δυν.ραβ} + E'_{κιν.περ.ραβ} + E'_{κιν.περ.σφ.}$ (μον. 2)

$m.g3L/2 + m.g.2L = m.g.L/2 + ½ .⅓.m.L^2.\omega_2^2 + ½ .m.L^2.\omega_2^2$ (μον. 1)

$3m.g.L = ½ (⅓.m.L^2 + m.L^2).\ \omega_2^2$

$$6m.g.L = (\frac{4}{3}m.L^2).\omega_2^2$$ (μον. 1)

$$6g = (\frac{4}{3}L).\omega_2^2$$

$$\frac{18g}{4L} = \omega_2^2$$

$$\omega_2^2 = \frac{9g}{2L} \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{9g}{2L}} \Rightarrow \omega_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow \omega_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}$$ (μον. 2)

β.

$$L_{\theta 2} = (I_{\rho\alpha\beta}+I_{\sigma\varphi}).\omega_2$$

$$L_{\theta 2} = (⅓.m.L^2 + m.L^2).\omega_2$$ (μον. 1)

$$L_{\theta 2} = (\frac{4}{3}m.L^2).\frac{3\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$L_{\theta 2} = (2.\sqrt{2}\,m.L.\sqrt{g.L}$$ (μον. 1)

γ. Η σφαίρα θα εκτελέσει οριζόντια βολή (μον. 1)

- Η αρχική ταχύτητα της σφαίρας είναι:

$$u_o = \omega_2.r$$

$$u_o = \frac{3\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}.L$$

$$u_o = \frac{3\sqrt{2}}{2}\sqrt{g.L}$$ (μον. 1)

- Ο χρόνος πτήσης της σφαίρας

$$y = ½.g.t^2$$

$$t= \sqrt{\frac{2y}{g}} \Rightarrow t= \sqrt{\frac{2(4L)}{g}} \Rightarrow t= \sqrt{\frac{8L}{g}}$$ (μον. 1)

- Η οριζόντια μετατόπιση της σφαίρας

$$x΄=u_o.t$$

$$x΄= \frac{3\sqrt{2}}{2}\sqrt{g.L}\,.\sqrt{\frac{8L}{g}}$$ (μον. 1)

$$x΄= \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2.8.g.L^2}{g}}$$

$$x΄ = \frac{3}{2}\sqrt{16L^2}$$

$$x΄=6L$$ (μον. 1)

- Η σφαίρα θα πέσει μέσα στην πισίνα γιατί x΄> 5L (μον. 1)

δ.

$$E_{\alpha\rho\chi 2} = E_{\tau\varepsilon\lambda 3}$$

$$E_{\kappa\iota\nu.\pi\varepsilon\rho 2} + E_{\delta\upsilon\nu.2} = E΄_{\delta\upsilon\nu 3}$$

$$½ .I.\omega_2^2 + m.g.h_2 = m.g.h_3$$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot mL^2 \cdot \omega_2^2 + m \cdot g \cdot L/2 = m \cdot g \cdot h_3$ (μον. 1)

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} L^2 \cdot \omega_2^2 + g \cdot L/2 = g \cdot h_3$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} L^2 \cdot \frac{9g}{2L} + g \cdot L/2 = g \cdot h_3$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} L \cdot \frac{9}{2} + L/2 = h_3$ (μον. 1)

$\frac{9}{12} L + L/2 = h_3$

$h_3 = \frac{5}{4} L$ (μον. 1)

Η ράβδος θα ανέβει πάνω από την οριζόντια θέση κατά

$H = h_3 - L$

$H = \frac{5}{4} L - L$

$H = \frac{1}{4} L$ (μον. 1)

Η γωνία που σχηματίζει με την πάνω κατακόρυφο είναι:

$συνθ = \frac{H}{\frac{L}{2}}$

$συνθ = \frac{\frac{L}{4}}{\frac{L}{2}}$

$συνθ = \frac{1}{2}$

$θ=60^0$ (μον. 2)

Τέλος