ΕΝΩΣΗ ΚΥΠΡΙΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ

25 Η ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ (Δεύτερη Φάση)

Κυριακή, 03 Απριλίου, 2011

<u>Παρακαλώ διαβάστε πρώτα τα πιο κάτω, πριν απαντήσετε οποιαδήποτε ερώτηση</u>

<u>Γενικές Οδηγίες:</u>

1) Είναι πολύ σημαντικό να δηλώσετε ορθά στον κατάλληλο χώρο στο εξώφυλλο του τετραδίου απαντήσεων τα εξής στοιχεία: (α) Όνομα και Επώνυμο, (β) Όνομα πατέρα, (γ) Σχολείο, (δ) Τηλέφωνο.
2) Το δοκίμιο αποτελείται από έξι (6) σελίδες και περιέχει έξι (6) θέματα.
3) Η εξέταση διαρκεί τρεις (3) ώρες.
4) Η συνολική βαθμολογία του εξεταστικού δοκιμίου είναι 100 μονάδες.
5) Χρησιμοποιήστε μόνο στυλό με μελάνι χρώματος μπλε ή μαύρο. Οι γραφικές παραστάσεις μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
6) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
7) Επιτρέπεται η χρήση μόνο μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.
8) Δηλώστε στις σελίδες του τετραδίου απαντήσεων τον αριθμό του προβλήματος και το αντίστοιχο γράμμα του ερωτήματος που απαντάτε.
9) Εάν χρησιμοποιήσετε κάποιες σελίδες του τετραδίου απαντήσεων για δικές σας σημειώσεις που δεν επιθυμείτε να βαθμολογηθούν, βάλτε ένα μεγάλο σταυρό (Χ) σε αυτές τις σελίδες ώστε να μην ληφθούν υπόψη στη βαθμολόγηση.
10) Να χρησιμοποιείτε μόνο σταθερές ή σχέσεις που δίνονται στο αντίστοιχο θέμα αλλά και στο τέλος των γενικών οδηγιών.
11) Τα σχήματα όλων των θεμάτων δεν είναι υπό κλίμακα.

<u>Σταθερές:</u>

$\pi = 3{,}14$, $\pi^2 = 10$, $g = 10\, m/s^2$.

<u>Δεδομένα:</u>

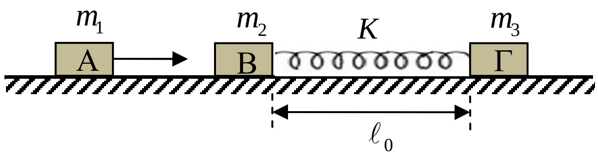
Για ελαστική κρούση μεταξύ δύο σωμάτων: $\vec{u}_1 + \vec{v}_1 = \vec{u}_2 + \vec{v}_2$.

Πυκνότητα: $d = \dfrac{m}{V}$

<u>Να απαντήσετε όλα τα προβλήματα που ακολουθούν</u>

Πρόβλημα - 1 **(15 μονάδες)**

Ένα σώμα A μάζας m_1 και κινητικής ενέργειας E συγκρούεται με δεύτερο σώμα B, μάζας m_2 που είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο σταθεράς K, που ικανοποιεί το νόμο του Hooke. Στο άλλο άκρο του ελατηρίου βρίσκεται συνδεδεμένο τρίτο σώμα Γ, μάζας m_3. Τα δύο σώματα B και Γ είναι αρχικά ακίνητα και το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος ℓ_0, πριν την κρούση. Η κρούση των σωμάτων είναι κεντρική και ελαστική και δεν υπάρχουν τριβές. Δίνεται ότι $m_1 < m_2$.



Να υπολογίσετε, μετά την κρούση:

(α) Την ενέργεια που μεταβιβάστηκε από το σώμα A στο σώμα B λόγω της κρούσης, ως συνάρτηση των μεγεθών m_1, m_2 και E.

(β) Την κινητική ενέργεια του κέντρου μάζας του συστήματος των δύο σωμάτων B και Γ, ως συνάρτηση των μεγεθών m_1, m_2, m_3 και E.

(γ) Την ελάχιστη απόσταση μεταξύ των σωμάτων B και Γ, ως συνάρτηση των μεγεθών m_1, m_2, m_3, K, ℓ, και E.

Λύση

(α) Υπολογίζουμε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος A. $E = \frac{1}{2} m_1 u_0^2 \Rightarrow u_0 = \sqrt{\frac{2E}{m_1}}$.

(1 μον.)

Διατηρείται η ορμή και η ενέργεια στην κρούση του σώματος A με το σώμα B. Άρα,

$m_1 u_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$. ***(1 μον.)***

$\frac{1}{2} m_1 u_o^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$ ή ισοδύναμα από τις δύο σχέσεις: $u_0 + v_1 = v_2$. ***(1 μον.)***

Από τη διατήρηση της ορμής έχουμε: $v_1 = u_0 - \frac{m_2}{m_1} v_2$. Αντικαθιστούμε στη δεύτερη εξίσωση, $v_2 = \frac{2u_0}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_0$. ***(1 μον.)***

Η κινητική ενέργεια που παίρνει το σώμα B είναι:

$E_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 (\frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_0)^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E$. ***(1 μον.)***

(β) <u>Α' Τρόπος</u>

Η θέση και η ταχύτητα του κέντρου μάζας των δύο σωμάτων Β και Γ, είναι

$$m_2\ell = (m_2+m_3)x \Rightarrow \frac{x}{\ell} = \frac{m_2}{m_2+m_3} = \frac{v_{\kappa.\mu.}}{v_2}.$$ ***(1 μον.)***

$$v_{\kappa.\mu.} = \frac{m_2}{m_2+m_3}v_2 = \frac{m_2}{m_2+m_3}\frac{2m_1}{m_1+m_2}u_0 = \frac{2m_1m_2}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)}u_0.$$ ***(2 μον.)***

Η κινητική ενέργεια του κέντρου μάζας είναι,

$$E_{\kappa.\mu.} = \frac{1}{2}(m_2+m_3)v_{\kappa.\mu.}^2 = \frac{1}{2}(m_2+m_3)[\frac{2m_1m_2}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)}u_0]^2$$ ***(1 μον.)***

$$\Rightarrow E_{\kappa.\mu.} = \frac{4m_1m_2^2}{(m_1+m_2)^2(m_2+m_3)}E.$$ ***(1 μον.)***

<u>Β' Τρόπος</u>

Η διατήρηση της ορμής και της μηχανικής ενέργειας μετά την κρούση του Α με το Β, δίνουν:

$$m_2v_2 = m_2v_2^{'} + m_3v_3\ ,\ \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_2v_2^{'2} + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \frac{1}{2}K(\Delta\ell)^2.$$ ***(1 μον.)***

Όταν το ελατήριο έχει τη μέγιστη συμπίεση και άρα τη μέγιστη ελαστική δυναμική ενέργεια, τότε η υπόλοιπη ενέργεια είναι η ενέργεια του κέντρο μάζας του συστήματος των σωμάτων Β και Γ. Τότε τα σώματα έχουν κοινή ταχύτητα. $v_2^{'} = v_3 = v_k$. Άρα,

$$v_k = \frac{m_2v_2}{m_2+m_3}.$$ ***(2 μον.)***

Η κινητική ενέργεια του κέντρου μάζας είναι, $E_{\kappa.\mu.} = \frac{1}{2}(m_2+m_3)v_k^2$. ***(1 μον.)***

Άρα, $E_{\kappa.\mu.} = \frac{1}{2}(m_2+m_3)\frac{m_2^2}{(m_2+m_3)^2}v_2^2 = \frac{1}{2}\frac{m_2^2}{m_2+m_3}\frac{4m_1^2}{(m_1+m_2)^2}u_0^2$

$E_{\kappa.\mu.} = \frac{1}{2}\frac{m_2^2}{m_2+m_3}\frac{4m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\frac{2E}{m_1}$. Άρα, $E_{\kappa.\mu.} = \frac{4m_1m_2^2}{(m_1+m_2)^2(m_2+m_3)}E$. ***(1 μον.)***

(γ) Α΄ Τρόπος

Η ενέργεια που μεταβιβάστηκε στο σώμα Β είναι ίση με το άθροισμα της κινητικής ενέργειας του κέντρο μάζας του συστήματος και της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου. Άρα, η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου υπολογίζεται από τη διαφορά,

$$E_\Delta = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}E - \frac{4m_1m_2^2}{(m_1+m_2)^2(m_2+m_3)}E \Rightarrow E_\Delta = \frac{4m_1m_2m_3}{(m_1+m_2)^2(m_2+m_3)}E \,. \qquad \textit{(2 μον.)}$$

Είναι, $E_\Delta = \frac{1}{2}K(\Delta\ell)^2$. Άρα,

$$\frac{1}{2}K(\Delta\ell)^2 = \frac{4m_1m_2m_3}{(m_1+m_2)^2(m_2+m_3)}E \Rightarrow \Delta\ell = \sqrt{\frac{8m_1m_2m_3E}{K(m_1+m_2)^2(m_2+m_3)}} \,. \qquad \textit{(2 μον.)}$$

Η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των σωμάτων Β και Γ, είναι

$\Delta x_{\min} = \ell - \Delta\ell$. Άρα,

$$\Delta x_{\min} = \ell - \sqrt{\frac{8m_1m_2m_3E}{K(m_1+m_2)^2(m_2+m_3)}} \,. \qquad \textit{(1 μον.)}$$

Β΄ Τρόπος

Η διατήρηση της ορμής και της μηχανικής ενέργειας μετά την κρούση του Α με το Β, δίνουν:

$$m_2v_2 = m_2v_2' + m_3v_3 \,,\ \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_2v_2'^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \frac{1}{2}K(\Delta\ell)^2 .$$

Όταν το ελατήριο έχει τη μέγιστη συμπίεση, $v_2' = v_3 = v_k$. Άρα, το σύστημα των δύο εξισώσεων δίνει, $v_k = \frac{m_2v_2}{m_2+m_3}$ και $\frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_2v_k^2 + \frac{1}{2}m_3v_k^2 + \frac{1}{2}K(\Delta\ell_{\max})^2$. *(3 μον.)*

Άρα, $m_2v_2^2 = v_k^2(m_2+m_3) + K(\Delta\ell_{\max})^2 \Rightarrow \Delta\ell_{\max}^2 = \frac{m_2}{K}\frac{m_3}{m_2+m_3}v_2^2$. Τελικά,

$\Delta\ell_{\max}^2 = \frac{m_2}{K}\frac{m_3}{m_2+m_3}\frac{4m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\frac{2E}{m_1}$. Άρα, $\Delta\ell_{\max}^2 = \frac{8Em_1m_2m_3}{K(m_2+m_3)(m_1+m_2)^2}$. Έτσι

$$\Delta\ell = \sqrt{\frac{8m_1m_2m_3E}{K(m_1+m_2)^2(m_2+m_3)}} \,. \qquad \textit{(1 μον.)}$$

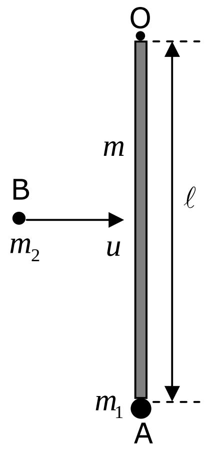
Η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των σωμάτων Β και Γ, είναι

$\Delta x_{\min} = \ell - \Delta\ell$. Άρα,

$$\Delta x_{\min} = \ell - \sqrt{\frac{8m_1m_2m_3E}{K(m_1+m_2)^2(m_2+m_3)}} \,. \qquad \textit{(1 μον.)}$$

Πρόβλημα - 2 **(20 μονάδες)**

Ομογενής ράβδος μήκους $\ell = 2m$ έχει μάζα $m = 3kg$ και βρίσκεται αρχικά κατακόρυφη σε ισορροπία, όπως δείχνει το σχήμα. Στο ένα άκρο της είναι στερεωμένη μια μικρή σφαίρα, Α, (θεωρήστε την ως υλικό σημείο) μάζας $m_1 = 0{,}1kg$. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές, σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από το άλλο άκρο της, Ο. Ένα βλήμα, Β, μάζας $m_2 = 0{,}2kg$ κτυπά τη ράβδο στο μέσο της, με ταχύτητα μέτρου $u = 23m/s$ και με διεύθυνση κάθετα στη ράβδο. Η κρούση είναι αμελητέας διάρκειας. Το βλήμα αμέσως μετά την κρούση σφηνώνεται μέσα στη ράβδο. Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το άκρο της Ο, $I_O = \frac{1}{3}m\ell^2$.



(α) Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου, αμέσως μετά την κρούση.

(β) Να υπολογίσετε το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας που μένει στο σύστημα (ράβδος, σφαίρα και βλήμα).

(γ) Να υπολογίσετε τη γραμμική ταχύτητα της σφαίρας Α αμέσως μετά την κρούση.

(δ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη γωνία που θα αποκλίνει η ράβδος, από την αρχική κατακόρυφη θέση.

Λύση

(α) Διατήρηση στροφορμής,

$$m_2 u \frac{\ell}{2} = (m_2 \frac{\ell^2}{4} + m_1 \ell^2 + \frac{1}{3} m \ell^2)\omega .$$ ***(3 μον.)***

Αντικαθιστούμε,

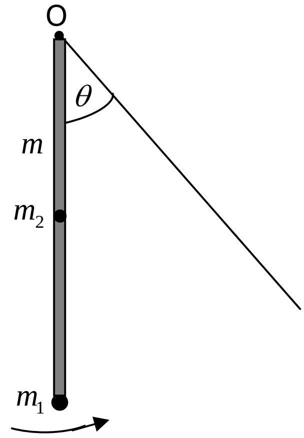
$$0{,}2 \cdot 23 \cdot \frac{2}{2} = (0{,}2 \frac{2^2}{4} + 0{,}1 \cdot 2^2 + \frac{1}{3} 3 \cdot 2^2)\omega \Rightarrow 4{,}6 = 4{,}6\omega \Rightarrow \omega = 1 rad/s .$$ ***(1 μον.)***

(β) Αρχική κινητική ενέργεια,

$$E_K = \frac{1}{2} m_2 u^2 = \frac{1}{2} 0{,}2 \cdot 23^2 = 52{,}9\,J .$$ ***(1 μον.)***

Ενέργεια του συστήματος αμέσως μετά την κρούση,

$$E = \frac{1}{2}(m_2 \frac{\ell^2}{4} + m_1 \ell^2 + \frac{1}{3} m \ell^2)\omega^2 = \frac{1}{2}(0{,}2 + 0{,}4 + 4) = 2{,}3\,J .$$ ***(2 μον.)***



Ποσοστό ενέργειας που μένει στο σύστημα,

$$\frac{E}{E_K} 100\% = \frac{2{,}3}{52{,}9} 100\% = 4{,}35\% .$$ ***(2 μον.)***

(γ) $u_A = \omega r_A = \omega \ell = 2\,m/s$. ***(2 μον.)***

(δ) Το σώμα Β και το κέντρο μάζας της ράβδου ανεβαίνουν κατά $h=\frac{\ell}{2}(1-\sigma\upsilon\nu\theta)$.

(2 μον.)

Το σώμα Α ανεβαίνει κατά $h=\ell(1-\sigma\upsilon\nu\theta)$. ***(2 μον.)***

Η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας δίνει,

$(m+m_2)g\frac{\ell}{2}(1-\sigma\upsilon\nu\theta)+m_1 g\ell(1-\sigma\upsilon\nu\theta)=E$. ***(3 μον.)***

$\Rightarrow g\ell(1-\sigma\upsilon\nu\theta)(m+m_2+2m_1)=2E$

$$1-\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{2E}{g\ell(m+m_2+2m_1)}\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta=1-\frac{2E}{g\ell(m+m_2+2m_1)}$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta=1-\frac{2(2,3)}{20(3+0,2+2\cdot 0,1)}=1-\frac{4,6}{68}=\frac{63,4}{68}$$

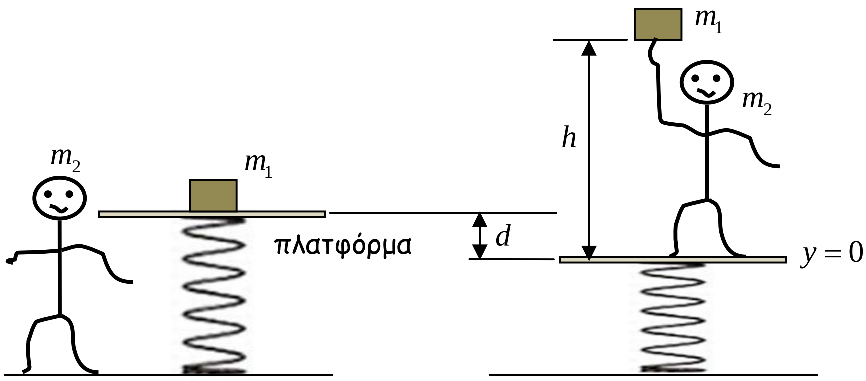
$\Rightarrow \theta=21,2^0$. ***(2 μον.)***

Πρόβλημα - 3 (20 μονάδες)

Ένα αβαρές ελατήριο, που ικανοποιεί το νόμο του Hooke, είναι κατακόρυφο με το ένα άκρο να στηρίζεται σε οριζόντια επιφάνεια. Στο άλλο άκρο του ελατηρίου συνδέεται μια πολύ λεπτή αβαρής πλατφόρμα, πάνω στην οποία βρίσκεται σε ισορροπία ένα σώμα από πλαστελίνη μάζας m_1. Ένας άνθρωπος μάζας m_2 ανεβαίνει στην πλατφόρμα, οπότε το ελατήριο ισορροπεί σε μια νέα θέση, σε απόσταση d κάτω από την προηγούμενη θέση ισορροπίας. Θεωρήστε ως σημείο αναφοράς, $y=0$, τη νέα θέση ισορροπίας της πλατφόρμας, όπως δείχνει το σχήμα και τη θετική φορά προς τα πάνω.

Ο άνθρωπος ανυψώνει κατακόρυφα την πλαστελίνη σε ύψος h πάνω από την πλατφόρμα και την αφήνει να πέσει ελεύθερα, χωρίς τριβές, τη χρονική στιγμή $t=0$.

Παρατηρούμε ότι, από τη στιγμή που ο άνθρωπος αφήνει την πλαστελίνη να πέσει ελεύθερα μέχρι τη στιγμή της κρούσης, η πλατφόρμα και ο άνθρωπος εκτελούν ακριβώς μια πλήρη ταλάντωση. Η κρούση της πλαστελίνης και της πλατφόρμας είναι πλαστική και αμελητέας διάρκειας.



(α) Να αποδείξετε τη σχέση που δίνει το ύψος h ως συνάρτηση του d.

(β) Να αποδείξετε τη σχέση που δίνει το λόγο του πλάτους ταλάντωσης της πλατφόρμας μετά την κρούση προς το πλάτος ταλάντωσης πριν την κρούση, ως συνάρτηση των μεγεθών m_1 και m_2.

(γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της θέσης y της πλατφόρμας σε συνάρτηση με το χρόνο από τη στιγμή t=0 μέχρι τη στιγμή που η πλατφόρμα συμπληρώνει μια πλήρη ταλάντωση μετά την κρούση.

Θεωρήστε σε αυτό το ερώτημα, για τη γραφική παράσταση, ότι $\frac{m_2}{m_1}=\frac{9}{1}$ και ότι $\pi=\sqrt{10}$.

Λύση

(α) Η σταθερά του ελατηρίου υπολογίζεται από το νόμο του Hooke:

$m_2 g = Kd \Rightarrow K = \dfrac{m_2 g}{d}$. ***(1 μον.)***

Η πλαστελίνη πέφτει κατά h, και έχουμε τη σχέση: $h = \dfrac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$, που δίνει το χρόνο κίνησης της πλαστελίνης πριν την κρούση με την πλατφόρμα. ***(1 μον.)***

Η περίοδος ταλάντωσης της πλατφόρμας και του ανθρώπου, πριν την κρούση, είναι:

$T_\pi = 2\pi \sqrt{\dfrac{m_2}{K}}$. Άρα, ***(1 μον.)***

$T_\pi = 2\pi \sqrt{\dfrac{d}{g}}$. ***(1 μον.)***

Σύμφωνα με τα δεδομένα, $T_\pi = t$. Άρα, ***(1 μον.)***

$2\pi \sqrt{\dfrac{d}{g}} = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} \Rightarrow 4\pi^2 \dfrac{d}{g} = \dfrac{2h}{g} \Rightarrow h = 2\pi^2 d$. ***(1 μον.)***

(β) Όταν αφήσουμε την πλαστελίνη να πέσει ελεύθερα προς τα κάτω, η θέση ισορροπίας της θα ανυψωθεί κατά $y_{0(\pi)}$ που θα είναι και το πλάτος ταλάντωσης της πλατφόρμας πριν την κρούση. Το πλάτος ταλάντωσης της πλατφόρμας πριν την κρούση είναι ίσο με την επιμήκυνση που προκαλούσε η πλαστελίνη στο ελατήριο. Άρα,

$m_1 g = K y_{0(\pi)} \Rightarrow m_1 g = \dfrac{m_2 g}{d} y_{0(\pi)} \Rightarrow y_{0(\pi)} = \dfrac{m_1}{m_2} d$. ***(2 μον.)***

Η κρούση γίνεται όταν η πλατφόρμα βρίσκεται στο χαμηλότερο σημείο της τροχιάς της με μηδενική ταχύτητα. Η πλαστελίνη τη στιγμή ης κρούσης έχει ταχύτητα μέτρου,

$u_1 = g T_\pi = 2\pi \sqrt{gd}$. ***(1 μον.)***

Βρίσκουμε από τη διατήρηση της ορμής το μέτρο της ταχύτητας των σωμάτων αμέσως μετά την πλαστική κρούση:

$m_1 u_1 = (m_1 + m_2) v$. ***(1 μον.)***

$\Rightarrow m_1 2\pi \sqrt{gd} = (m_1 + m_2) v$

$\Rightarrow v = \dfrac{2\pi m_1 \sqrt{gd}}{m_1 + m_2}$. ***(1 μον.)***

Η περίοδος ταλάντωσης μετά την κρούση είναι:

$T_\mu = 2\pi \sqrt{\dfrac{m_1 + m_2}{K}} = 2\pi \sqrt{\dfrac{(m_1 + m_2) d}{m_2 g}}$. ***(1 μον.)***

Είναι:

$v = \frac{2\pi}{T_\mu} y_{0(\mu)} \Rightarrow \frac{2\pi m_1 \sqrt{gd}}{m_1 + m_2} = \sqrt{\frac{m_2 g}{(m_1+m_2)d}}\, y_{0(\mu)}$. Τελικά,

$y_{0(\mu)} = \frac{2\pi m_1 \sqrt{gd}}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{(m_1+m_2)d}{m_2 g}} \Rightarrow y_{0(\mu)} = 2\pi d m_1 \sqrt{\frac{1}{m_2(m_1+m_2)}}$. *(2 μον.)*

Άρα,

$\frac{y_{0(\mu)}}{y_{0(\pi)}} = \frac{2\pi d m_1}{\sqrt{m_2(m_1+m_2)}}\frac{m_2}{d m_1} = \frac{2\pi m_2}{\sqrt{m_2(m_1+m_2)}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}}$. *(1 μον.)*

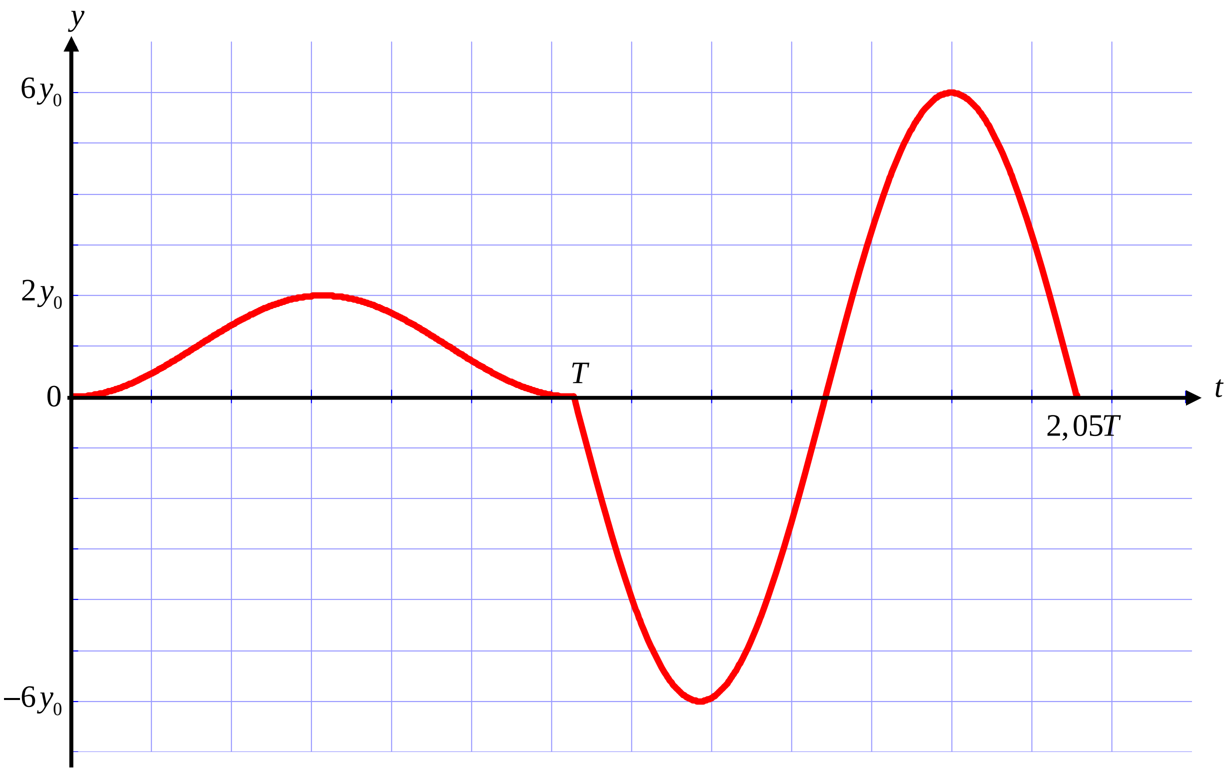
(γ) $\frac{y_{0(\mu)}}{y_{0(\pi)}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{m_2}{m_1}}{1+\frac{m_2}{m_1}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{9}{1}}{1+\frac{9}{1}}} = 2\pi\sqrt{\frac{9}{10}} = 6$. *(1 μον.)*

Είναι, $T_\pi = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}$ και

$$T_\mu = 2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{(m_1+m_2)d}{m_2 g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1+\frac{m_2}{m_1}}{\frac{m_2}{m_1}}\frac{d}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{10}{9}\frac{d}{g}} = 2\pi\frac{\sqrt{10}}{3}\sqrt{\frac{d}{g}}$$

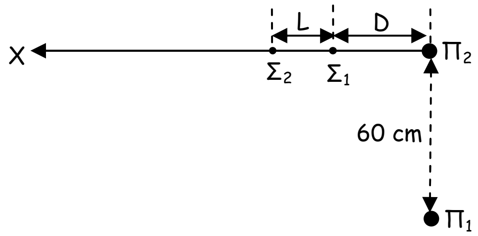
Άρα, $\frac{T_\mu}{T_\pi} = \frac{\sqrt{10}}{3}$. *(1 μον.)*

Έτσι, η γραφική παράσταση είναι: *(3 μον.)*


y
6y0
2y0
0
−6y0
T
t
2,05T

Πρόβλημα - 4 **(15 μονάδες)**

Δύο ηχητικές σημειακές πηγές Π_1 και Π_2 απέχουν 60cm μεταξύ τους και εκπέμπουν πανομοιότυπα κύματα στο ίδιο μέσο όπου ταξιδεύουν με ταχύτητα μέτρου 340m/s. Οι πηγές είναι σύγχρονες και εκπέμπουν κύματα με συχνότητα 3400Hz.



Ένας παρατηρητής μετακινεί αργά-αργά, ένα ευαίσθητο μικρόφωνο από το Π_2 προς το Χ στην ευθεία Π_2Χ κάθετη πάνω στην ευθεία $\Pi_1\Pi_2$. Να υπολογίσετε:

(α) Την απόσταση D ενός σημείου Σ_1 από την Π_2, όπου ο παρατηρητής θα σημειώσει για πρώτη φορά μέγιστο στην ένταση του ήχου.

(β) Την απόσταση L ενός σημείου Σ_2 , από το Σ_1, όπου ο παρατηρητής θα σημειώσει το αμέσως επόμενο ελάχιστο της έντασης του ήχου.

Λύση

(α) Η συνθήκη για πλήρη ενισχυτική συμβολή είναι: $\Delta x = k\lambda$. *(1 μον.)*

Είναι: $\Delta x = (\Pi_1\Sigma_1) - (\Pi_2\Sigma_2) = \sqrt{D^2 + 0,6^2} - D$. *(2 μον.)*

Επίσης, $u = \lambda f$. *(1 μον.)*

Άρα, $\sqrt{D^2+0,6^2} - D = k\dfrac{u}{f} \Rightarrow \sqrt{D^2+0,6^2} - D = k\dfrac{1}{10} \Rightarrow \sqrt{D^2+0,6^2} = k\dfrac{1}{10} + D$

$$\Rightarrow D^2 + 0,36 = k^2\frac{1}{100} + D^2 + \frac{kD}{5} \Rightarrow 0,36 = \frac{k^2}{100} + \frac{kD}{5} \Rightarrow k^2 + 20kD - 36 = 0$$

$$\Rightarrow k^2 = 36 - 20kD \Rightarrow D = \frac{36-k^2}{20k}.$$ *(2 μον.)*

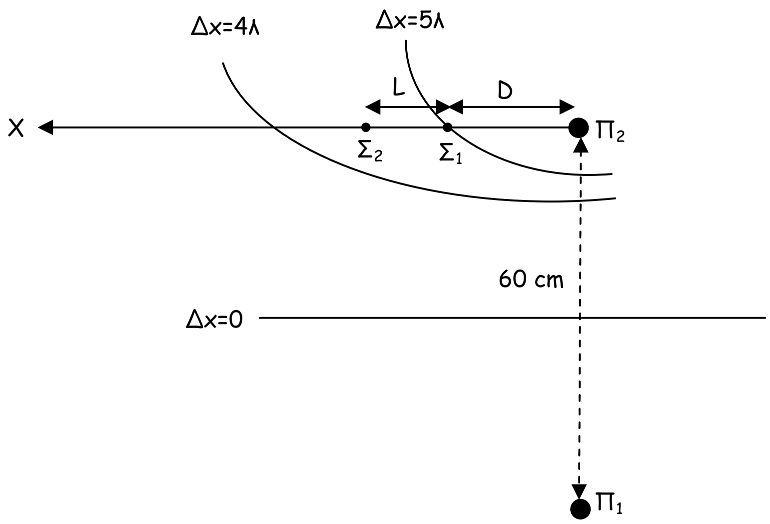
Είναι $D > 0$ και το k παίρνει μόνο ακέραιες τιμές. Για την ελάχιστη απόσταση D, το k θα πρέπει να πάρει τη μέγιστη δυνατή ακέραια τιμή με $36 - k^2 > 0$. Άρα, $k = 5$. Άρα,

$$D = \frac{36-5^2}{20\cdot 5} = \frac{119}{100} = 0,11\,m = 11\,cm.$$ *(2 μον.)*

(β) Στο αμέσως ελάχιστο μετά το πρώτο μέγιστο στο Σ_1, θα έχουμε,

$\Delta x = 9\dfrac{\lambda}{2}$. *(3 μον.)*

Άρα, $(\Pi_1\Sigma_2) - (\Pi_2\Sigma_2) = 4,5\lambda \Rightarrow \sqrt{(x)^2 + 0,6^2} - (x) = 0,45$. *(2 μον.)*

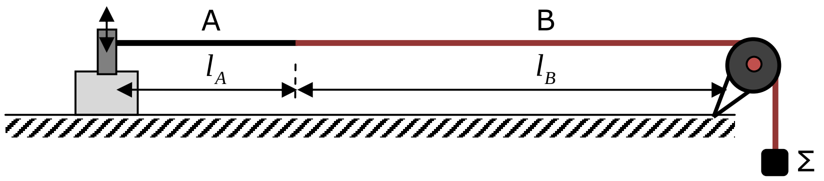


$$\sqrt{x^2 + 0,6^2} = 0,45 + x$$
$$x^2 + 0,36 = (0,45 + x)^2$$
$$x^2 + 0,36 = 0,2025 + x^2 + 0,9x$$
$$0,36 = 0,2025 + 0,9x \Rightarrow 0,9x = 0,1575 \Rightarrow x = 0,175\,m = 17,5\,cm.$$

Άρα, $L = 0,175 - 0,11 = 0,065\,m = 6,5\,cm$. *(2 μον.)*

Πρόβλημα - 5 **(15 μονάδες)**

Μια κυλινδρική ομογενής χορδή Α έχει μήκος $\ell_A = 2m$ και εμβαδόν διατομής 10^{-3} cm^2. Η χορδή Α συνδέεται με δεύτερη ομογενή και κυλινδρική χορδή Β, της ίδιας διατομής και μήκους $\ell_B = 5m$, από το σημείο της ένωσης μέχρι την τροχαλία, όπως δείχνει το σχήμα. Η πυκνότητα της χορδής Α είναι $d_A = 6075\,kg/m^3$ και η πυκνότητα της χορδής Β είναι $d_B = 2700\,kg/m^3$. Το ένα άκρο της σύνθετης χορδής που σχηματίζεται συνδέεται με ένα κύβο Σ μάζας $m = 1kg$ και το άλλο άκρο της με μηχανισμό παραγωγής εγκάρσιων κυμάτων μεταβαλλόμενης συχνότητας. (Τα δύο άκρα της σύνθετης χορδής, στην οποία δημιουργούνται στάσιμα κύματα, θεωρείστε ότι είναι δεσμοί).



(α) Να υπολογίσετε την πιο μικρή συχνότητα διέγερσης για να σχηματιστεί στάσιμο κύμα στη σύνθετη χορδή, με δεσμό στο σημείο της ένωσης των δύο χορδών Α και Β.

(β) Ποιος είναι ο συνολικός αριθμός των κοιλίων που σχηματίζονται στη σύνθετη χορδή;

(γ) Να σχεδιάσετε ένα στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος που σχηματίζεται στη σύνθετη χορδή τη στιγμή που οι κοιλίες είναι στη μέγιστη μετατόπισή τους από τα σημεία ισορροπίας τους.

Λύση

(α) Για να δημιουργείται στάσιμο κύμα σε χορδή στερεωμένη στα δύο άκρα, θα πρέπει να πληρούται η σχέση,

$\ell = k\dfrac{\lambda}{2}$, όπου k ένας ακέραιος αριθμός (εκφράζει στην περίπτωση αυτή τον αριθμό των κοιλίων). ***(2 μον.)***

Είναι, $u = \lambda f \Rightarrow \lambda = \dfrac{u}{f}$. Άρα, $\ell = k\dfrac{u}{2f}$. ***(2 μον.)***

Η συχνότητα για τα δύο τμήματα της σύνθετης χορδής είναι σταθερή, εφόσον καθορίζεται από την πηγή των κυμάτων. Η ταχύτητα όμως διαφέρει εφόσον οι χορδές έχουν διαφορετική πυκνότητα. Έχουν επίσης διαφορετικό μήκος αλλά το ίδιο εμβαδόν διατομής.

Η ταχύτητα διάδοσης των εγκάρσιων κυμάτων κατά μήκος μιας χορδής, γραμμικής πυκνότητας μ που είναι τεντωμένη με δύναμη (τάση) F, δίνεται από τη σχέση,

$u = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{mg}{\mu}}$, εφόσον η τάση της χορδής είναι το βάρος του κύβου. ***(1 μον.)***

Είναι, $d = \frac{m_x}{V} \Rightarrow d = \frac{m_x}{s\ell} \Rightarrow d = \frac{\mu}{s} \Rightarrow \mu = ds$. Άρα, $u = \sqrt{\frac{mg}{ds}}$. Επομένως, η συνθήκη για τη δημιουργία στάσιμων κυμάτων γίνεται,

$\ell = k\frac{1}{2f}\sqrt{\frac{mg}{ds}} \Rightarrow k = \frac{2f\ell}{\sqrt{mg}}\sqrt{ds}$. *(2 μον.)*

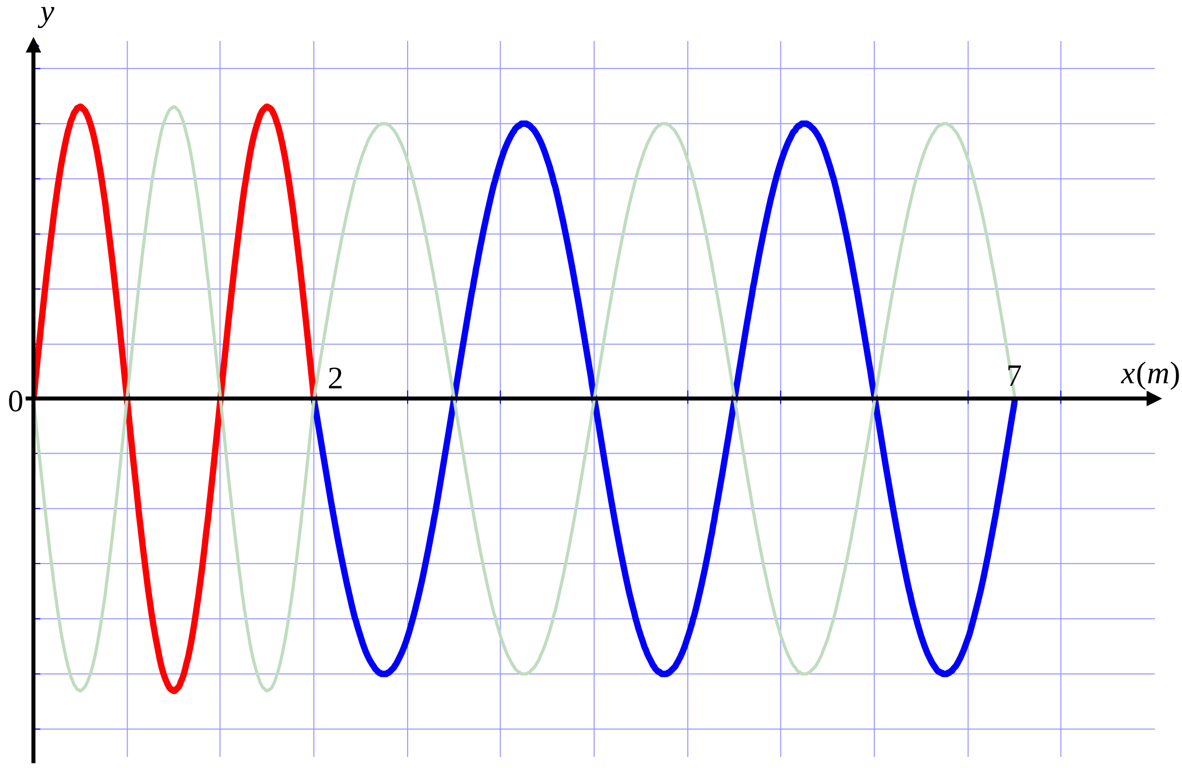
$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\ell_1}{\ell_2}\sqrt{\frac{d_1}{d_2}}$. Αντικαθιστούμε, $\frac{k_1}{k_2} = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{6075}{2700}} = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{2}{5}\frac{3}{2} = \frac{3}{5}$.

Άρα, οι μικρότεροι ακέραιοι αριθμοί για τη μικρότερη συχνότητα, είναι $k_1 = 3$ και $k_2 = 5$. Επομένως,

$k_1 = \frac{2f\ell_A}{\sqrt{mg}}\sqrt{d_A s} \Rightarrow 3 = \frac{2f2}{\sqrt{10}}\sqrt{6075\cdot 10^{-7}} \Rightarrow 3 = 0,0312f \Rightarrow 96,15\,Hz$. *(2 μον.)*

(β) Υπάρχουν 3+5 = 8 κοιλίες. *(2 μον.)*

(γ) Στιγμιότυπο στάσιμο στη σύνθετη χορδή. *(4 μον.)*

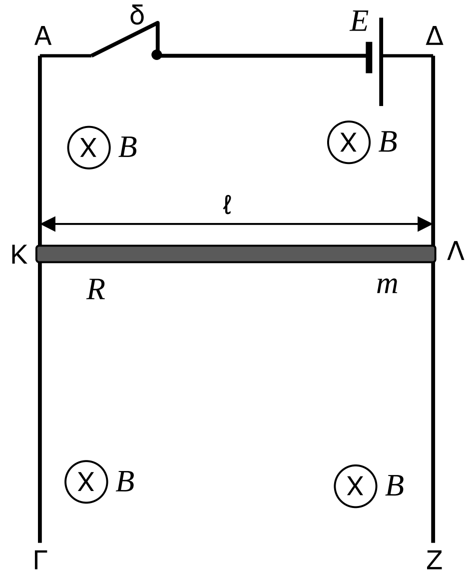


Πρόβλημα - 6 **(15 μονάδες)**

Οι λεπτοί παράλληλοι αγωγοί ΑΓ και ΔΖ είναι κατακόρυφοι **πολύ μεγάλου μήκους**, αμελητέας ωμικής αντίστασης και απέχουν μεταξύ τους απόσταση $\ell = 1m$. Τα άκρα Α και Δ συνδέονται, μέσω του διακόπτη δ, με την πηγή συνεχούς ρεύματος.

Η ηλεκτρεγερτική δύναμη της πηγής είναι $E = 8V$.

Ο αγωγός ΚΛ, μήκους $\ell = 1m$, μάζας $m = 0,2kg$ και ωμικής αντίστασης $R = 4\Omega$, μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές πάνω στους αγωγούς ΑΓ και ΔΖ, μένοντας συνεχώς σε επαφή με αυτούς. Όλη η διάταξη βρίσκεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής $B = 2\mathrm{T}$, κάθετο στο επίπεδο των αγωγών. Αρχικά κρατούμε τον αγωγό ΚΛ ακίνητο. Έχοντας το διακόπτη δ κλειστό, αφήνουμε τον αγωγό ΚΛ, τη στιγμή $t = 0$, να κινηθεί.



(α) Να σημειώσετε σε κατάλληλο σχήμα τις δυνάμεις που ασκούνται στον αγωγό τη στιγμή $t = 0$ και να τις υπολογίσετε.

(β) Να εξάγετε τη σχέση για το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που δέχεται ο αγωγός ΣF, σε συνάρτηση με την ένταση του ρεύματος I, $\Sigma F = f(I)$.

(γ) Να εξηγήσετε γιατί ο αγωγός ΚΛ αποκτά οριακή ταχύτητα $u_{o\rho}$ και να αποδείξετε ότι δίνεται από τη σχέση, $u_{o\rho} = \dfrac{mgR + BE\ell}{B^2\ell^2}$.

(δ) Να εξάγετε τη σχέση για την ένταση του ρεύματος I που διαρρέει το κύκλωμα, σε συνάρτηση με το μέτρο της ταχύτητας του αγωγού u, $I = f(u)$ και να κάνετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση, σε βαθμολογημένους άξονες, από τη στιγμή $t = 0$ μέχρι τη στιγμή που ο αγωγός αποκτά οριακή ταχύτητα.

(ε) Να εξηγήστε τις ενεργειακές μετατροπές που συμβαίνουν στο σύστημα, **(i)** από τη στιγμή $t = 0$ μέχρι τη στιγμή που ο αγωγός αποκτά οριακή ταχύτητα και **(ii)** από τη στιγμή που αποκτά οριακή ταχύτητα και μετά. (Χωρίς μαθηματικές σχέσεις).

Λύση

(α) $F_L = BI\ell = B\frac{E}{R}\ell \Rightarrow F_L = 2\frac{8}{4}1 = 4\,N$, με φορά προς τα κάτω. ***(1 μον.)***

$B = mg \Rightarrow B = 0,2 \cdot 10 = 2\,N$, με φορά προς τα κάτω. ***(1 μον.)***

(β) Η μαγνητική δύναμη Laplace στον αγωγό έχει μέτρο,

$F_L = BI\ell \Rightarrow F_L = BI\ell = 2I$, μονάδες στο S.I.

Η συνισταμένη δύναμη στον αγωγό είναι,

$\Sigma\vec{F} = m\vec{g} + \vec{F_L}$.

Άρα το μέτρο της συνισταμένης δύναμης, σε σχέση με το ρεύμα είναι,

$\Sigma F = 2 + 2I$, μονάδες στο S.I. ***(1 μον.)***

(γ) Η αρχική φορά της δύναμης Laplace είναι προς τα κάτω, στη φορά του βάρους. Όταν η δύναμη Laplace αντιστραφεί και γίνει σε μέτρο ίση με το μέτρο του βάρους του αγωγού, η ταχύτητα του αγωγού αποκτά σταθερή (οριακή) τιμή. Αυτό συμβαίνει όταν αλλάξει φορά το ρεύμα, όπως προκύπτει από τη σχέση $\Sigma F = 2 + 2I$, με $\Sigma F = 0$

(1 μον.)

Άρα, $mg = BI\ell \Rightarrow mg = B(\frac{E_{\varepsilon\pi} - E}{R})\ell \Rightarrow mgR = B(Bu_{o\rho}\ell - E)\ell$

$\Rightarrow mgR = B^2 u_{o\rho}\ell^2 - BE\ell \Rightarrow u_{o\rho} = \frac{mgR + BE\ell}{B^2\ell^2}$. ***(3 μον.)***

(δ) Η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος κάθε στιγμή είναι,

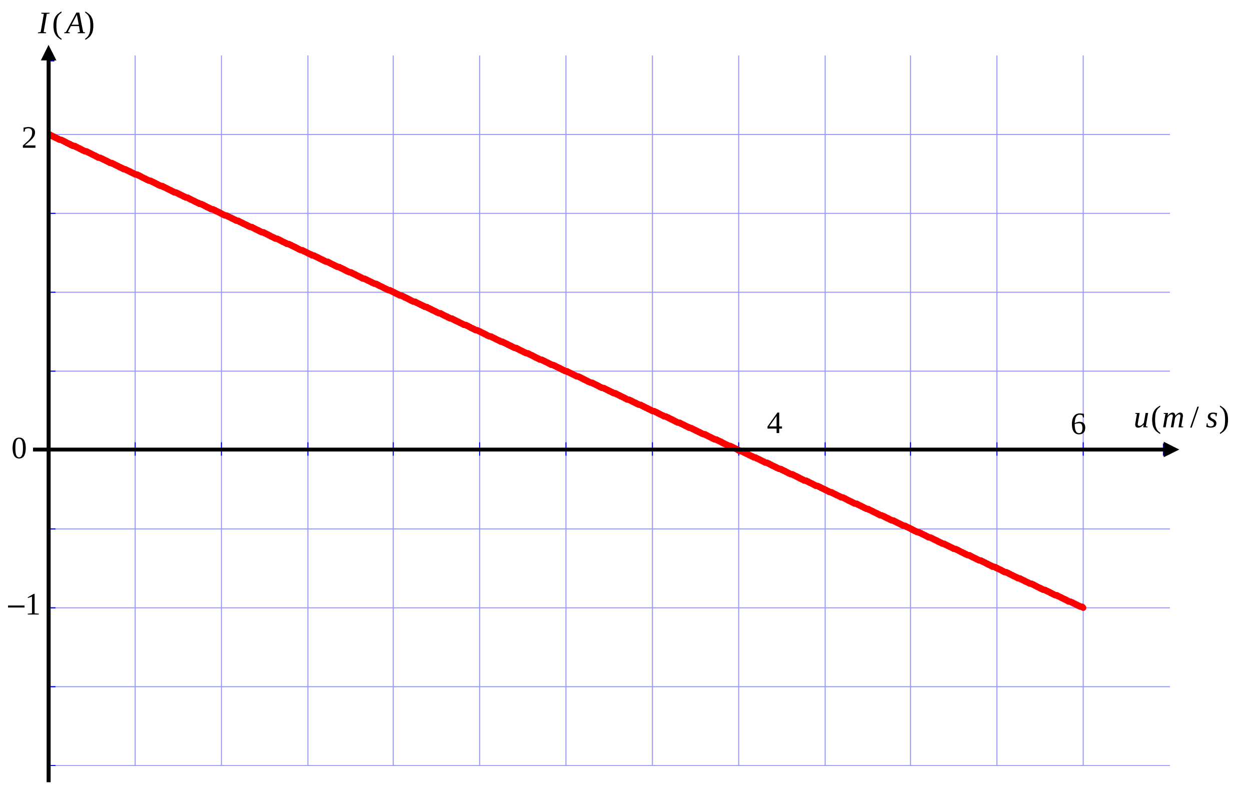
$I = \frac{\Sigma E}{R} = \frac{E - E_{\varepsilon\pi}}{R} \Rightarrow I = \frac{E - Bu\ell}{R}$. ***(1 μον.)***

$\Rightarrow I = \frac{8 - 2u}{4} \Rightarrow I = 2 - 0,5u$, μονάδες στο S.I. ***(1 μον.)***

Από τη σχέση $\Sigma F = 2 + 2I$ και $I = 2 - 0,5u$.

Έχουμε $\Sigma F = 6 - u$ με $\Sigma F = 0$ παίρνουμε, $u_{o\rho} = 6\,m/s$.

Άρα, έχουμε τη γραφική παράσταση, $I = f(u)$. ***(2 μον.)***



I(A)
2
0
−1
4
6
u(m / s)

(ε) (i) Αυξάνεται η κινητική ενέργεια του αγωγού μέχρι τη στιγμή που αποκτά οριακή ταχύτητα. Αυξάνεται η ηλεκτρική ενέργεια και μειώνεται η δυναμική βαρυτική ενέργεια. Η ηλεκτρική πηγή μειώνει την ενέργειά της μέχρι τη στιγμή που το ρεύμα γίνεται μηδέν (η ταχύτητα έχει μέτρο 4 m/s τη στιγμή αυτή). Από τη στιγμή αυτή και μετά η πηγή παίρνει ενέργεια, εφόσον το ρεύμα αλλάζει φορά. ***(3 μον.)***

(ii) Από τη στιγμή που ο αγωγός αποκτά οριακή (σταθερή) τιμή δεν υπάρχει μεταβολή της κινητικής ενέργειας. Αυξάνεται η ηλεκτρική ενέργεια και μειώνεται η δυναμική βαρυτική ενέργεια. Η ηλεκτρική πηγή αυξάνει την ενέργειά της εφόσον το ρεύμα άλλαξε φορά. ***(1 μον.)***