ΕΝΩΣΗ ΚΥΠΡΙΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ

25 ^{Η} ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Κυριακή, 03 Απριλίου, 2011

<u>Παρακαλώ διαβάστε πρώτα τα πιο κάτω, πριν απαντήσετε οποιαδήποτε ερώτηση</u>

<u>Γενικές Οδηγίες:</u>

1) Είναι πολύ σημαντικό να δηλώσετε ορθά στον κατάλληλο χώρο στο εξώφυλλο του τετραδίου απαντήσεων τα εξής στοιχεία: (α) Όνομα και Επώνυμο, (β) Όνομα πατέρα, (γ) Σχολείο, (δ) Τηλέφωνο.
2) Το δοκίμιο αποτελείται από έξι (6) σελίδες και περιέχει έξι (6) θέματα.
3) Η εξέταση διαρκεί τρεις (3) ώρες.
4) Η συνολική βαθμολογία του εξεταστικού δοκιμίου είναι 100 μονάδες.
5) Χρησιμοποιήστε μόνο στυλό με μελάνι χρώματος μπλε ή μαύρο. Οι γραφικές παραστάσεις μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
6) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
7) Επιτρέπεται η χρήση μόνο μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.
8) Δηλώστε στις σελίδες του τετραδίου απαντήσεων τον αριθμό του προβλήματος και το αντίστοιχο γράμμα του ερωτήματος που απαντάτε.
9) Εάν χρησιμοποιήσετε κάποιες σελίδες του τετραδίου απαντήσεων για δικές σας σημειώσεις που δεν επιθυμείτε να βαθμολογηθούν, βάλτε ένα μεγάλο σταυρό (Χ) σε αυτές τις σελίδες ώστε να μην ληφθούν υπόψη στη βαθμολόγηση.
10) Να χρησιμοποιείτε μόνο σταθερές ή σχέσεις που δίνονται στο αντίστοιχο θέμα αλλά και στο τέλος των γενικών οδηγιών.
11) Τα σχήματα όλων των θεμάτων δεν είναι υπό κλίμακα.

<u>Σταθερές:</u>

$\pi = 3{,}14$, $g_{0(\Gamma\eta)} = 10\, m/s^2$, $K_0 = 9x10^9\, N.m^2.C^{-2}$, $G = 6{,}673x10^{-11}\, N.m^2.kg^{-2}$,

$V_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

<u>Η αντίσταση του αέρα να θεωρηθεί αμελητέα.</u>

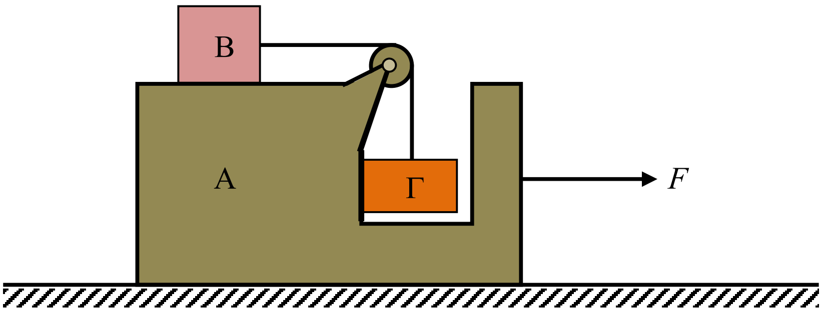
<u>Να απαντήσετε όλα τα προβλήματα που ακολουθούν.</u>

Πρόβλημα - 1 (10 μονάδες)

Στο σχήμα τα σώματα Α, Β και Γ έχουν μάζες m_1, m_2 και m_3 αντίστοιχα. Τα σώματα Β και Γ συνδέονται με μη εκτατό και αβαρές νήμα. Το σώμα Α βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια. Πάνω στο σώμα A ασκείται η δύναμη μέτρου F, με οριζόντια διεύθυνση και φορά προς τα δεξιά, έτσι ώστε το σώμα Α να ολισθαίνει πάνω στην οριζόντια επιφάνεια και το σώμα Γ ούτε ανεβαίνει ούτε κατεβαίνει.

Θεωρήστε ότι μεταξύ όλων των επιφανειών δεν υπάρχει τριβή.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g.



(α) Να εξάγετε τη σχέση που δίνει το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος Β, ως συνάρτηση των μαζών m_2, m_3 και της επιτάχυνσης της βαρύτητας g. ***(3 μον.)***

(β) Να σημειώσετε, σε ελεύθερο διάγραμμα δυνάμεων, όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Α, στην οριζόντια διεύθυνση. Να αναφέρετε το σώμα που ασκεί την καθεμιά από τις δυνάμεις αυτές. ***(2 μον.)***

(γ) Να εξάγετε τη σχέση που δίνει το μέτρο της δύναμης F, ως συνάρτηση των μαζών m_1, m_2, m_3 και της επιτάχυνσης της βαρύτητας g.

(5 μον.)

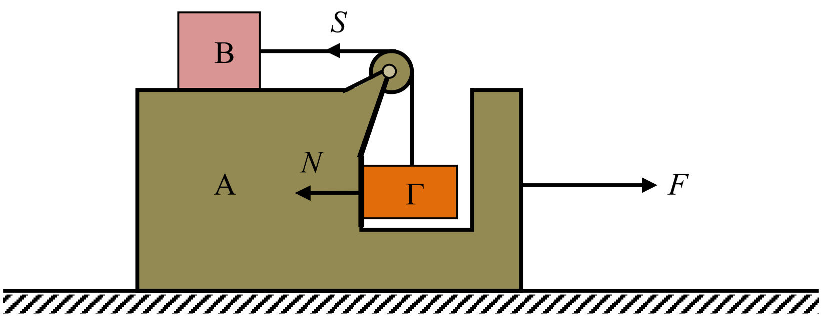
Λύση

(α) Το σώμα Γ ούτε ανεβαίνει ούτε κατεβαίνει, άρα έχουμε: $S = m_3 g$. *(1 μον.)*

Το σώμα Β επιταχύνεται προς τα δεξιά με επιτάχυνση μέτρου $a = \frac{S}{m_2}$. *(1 μον.)*

Άρα, $a = \frac{m_3}{m_2} g$. *(1 μον.)*

(β) Το σώμα Α δέχεται οριζόντια τρεις δυνάμεις:
Την εξωτερική δύναμη F.
Την κάθετη δύναμη N που ασκεί το σώμα Γ. *(1 μον.)*
Την τάση S από το οριζόντιο νήμα. *(1 μον.)*



(γ) **Α' Τρόπος** **(Αναλυτικός τρόπος)**

Το σώμα Γ επιταχύνεται οριζόντια με επιτάχυνση μέτρου $a = \frac{N}{m_3}$. *(2 μον.)*

Για το σώμα Β όπως αναφέραμε, $a = \frac{S}{m_2}$.

Το σώμα Α επιταχύνεται προς τα δεξιά με επιτάχυνση μέτρου $a = \frac{F - N - S}{m_1}$. *(2 μον.)*

Άρα, $F = am_1 + S + N \Rightarrow F = a(m_1 + m_2 + m_3) \Rightarrow F = \frac{m_3(m_1 + m_2 + m_3)}{m_2} g$. *(1 μον.)*

Β' Τρόπος **(Θεωρώντας τα τρία σώματα ως σύστημα)**

Το σύστημα των τριών σωμάτων επιταχύνεται μόνο με την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων. Οι εσωτερικές δυνάμεις δηλαδή η τάση του νήματος στα σώματα Β και Α και οι κάθετες δυνάμεις μεταξύ των σωμάτων Α και Γ δίνουν για το σύστημα συνισταμένη δύναμη μηδέν, άρα δεν προκαλούν επιτάχυνση στο σύστημα. Η συνισταμένη όλων των εξωτερικών δυνάμεων στην οριζόντια διεύθυνση είναι η δύναμη F. *(3 μον.)*

Άρα, $F = (m_1 + m_2 + m_3)a$. Είναι, $a = \frac{m_3}{m_2} g$. Άρα, $F = \frac{m_3(m_1 + m_2 + m_3)}{m_2} g$. *(2 μον.)*

Πρόβλημα - 2 **(10 μονάδες)**

(α) Να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό της έντασης του πεδίου βαρύτητας σε απόσταση r από το κέντρο ενός πλανήτη και το νόμο της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα μεταξύ του πλανήτη και ενός σώματος για να αποδείξετε ότι η ένταση του πεδίου βαρύτητας του πλανήτη σε απόσταση r από το κέντρο του, σε σχέση με την πυκνότητα d και την ακτίνα R του πλανήτη, δίνεται από τη σχέση, $g_r = \frac{4}{3}\pi G d R^3 \frac{1}{r^2}$, όπου $r \geq R$ και G είναι η παγκόσμια σταθερά βαρύτητας.
Θεωρήστε τον πλανήτη σφαιρικό και με σταθερή πυκνότητα.

(5 μον.)

(β) Η Ιώ είναι ένας από τους δορυφόρους του πλανήτη Δία που ανακαλύφθηκε από τον Γαλιλαίο τον Ιανουάριο του 1610 και σχεδόν συγχρόνως από το Γερμανό
αστρονόμο Μάγερ Σίμωνα.
Η Ιώ έχει ακτίνα κυκλικής τροχιάς γύρω από το Δία 421700 km και περίοδο 42 ώρες, 27 λεπτά και 34 δευτερόλεπτα. Η (μέση) πυκνότητα του Δία είναι $1,326\, g/cm^3$.
Να χρησιμοποιήσετε τα δεδομένα αυτά μαζί με τη σχέση που αποδείξατε στο (α) ερώτημα για να υπολογίσετε τη (μέση) ακτίνα του Δία.

(5 μον.)

Λύση

(α) Είναι $g_r = \frac{F}{m}$ και $F = G\frac{mM}{r^2}$. Άρα, $g_r = \frac{GM}{r^2}$. ***(3 μον.)***

Η πυκνότητα ενός σώματος είναι, $d = \frac{M}{V}$ και για σφαιρικό σώμα ακτίνας R, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Άρα, $g_r = \frac{GM}{r^2} = \frac{GdV}{r^2} = \frac{Gd\frac{4}{3}\pi R^3}{r^2} \Rightarrow g_r = \frac{4}{3}\pi G d R^3 \frac{1}{r^2}$. ***(2 μον.)***

(β) Η ένταση της βαρύτητας g_r ενός πλανήτη σε κάθε σημείο της τροχιάς ενός δορυφόρου του πλανήτη είναι και κεντρομόλος επιτάχυνση, εφόσον η μοναδική δύναμη που ασκείται στο δορυφόρο είναι η δύναμη παγκόσμιας έλξης μεταξύ του δορυφόρου και του πλανήτη, γύρω από τον οποίο περιφέρεται σε κυκλική τροχιά. ***(1 μον.)***

$$g_r = a_K \Rightarrow \frac{4}{3}\pi G d R^3 \frac{1}{r^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} r \Rightarrow \frac{1}{3} G d R^3 \frac{1}{r^2} = \frac{\pi}{T^2} r .$$

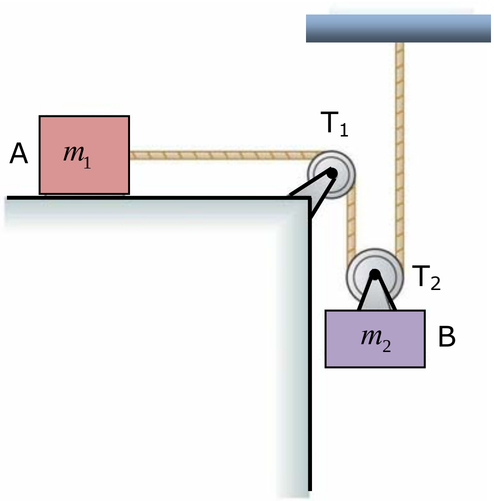
$$\Rightarrow R^3 = \frac{3\pi r^3}{G d T^2} \Rightarrow R = r\sqrt[3]{\frac{3\pi}{G d T^2}} .$$ ***(2 μον.)***

Αντικαθιστούμε, $R = r\sqrt[3]{\frac{3\pi}{G d T^2}} = 4,217x10^8 \sqrt[3]{\frac{3\cdot 3,14}{6,673x10^{-11}\cdot 1326 \cdot (152854)^2}}$

$$\Rightarrow R = 6,991x10^7\, m .$$ ***(2 μον.)***

Πρόβλημα - 3 (10 μονάδες)

Στο σχήμα τα σώματα Α και Β με μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα συνδέονται μεταξύ τους με αβαρές και μη εκτατό νήμα διαμέσου της σταθερής τροχαλίας T_1 και της κινούμενης τροχαλίας T_2. Οι τροχαλίες είναι αμελητέου βάρους και δεν παρουσιάζουν τριβές με το νήμα. Μεταξύ του σώματος Α και της οριζόντιας επιφάνειας υπάρχει τριβή με συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu_{o\lambda}$. Αφήνουμε τα σώματα να κινηθούν από την ηρεμία. Το βάρος του σώματος Β είναι αρκετό για να προκαλέσει ολίσθηση στο σώμα Α.



(α) Να εξηγήσετε αν τα σώματα θα έχουν την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα σε οποιαδήποτε στιγμή της κίνησής τους.

Αν όχι να προσδιορίσετε το λόγο του μέτρου της ταχύτητας του Α προς το μέτρο της ταχύτητας του Β.

(4 μον.)

(β) Να δείξετε ότι το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος Β δίνεται από τη σχέση,

$$a = \frac{(m_2 - 2\mu_{o\lambda} m_1)g}{4m_1 + m_2}.$$

(6 μον.)

Λύση

(α) Όταν το σώμα Β κατέβει κατά h το μήκος του κατακόρυφου νήματος αυξάνεται κατά $2h$, δηλαδή αυξάνεται κατά h τόσο αριστερά όσο και δεξιά από την κινούμενη τροχαλία. Άρα, το μήκος του οριζόντιου νήματος μειώνεται κατά $2h$, έτσι ώστε να διατηρηθεί το συνολικό μήκος του νήματος. Άρα, όταν το σώμα Β διανύει διάστημα h το σώμα Α, στον ίδιο χρόνο, διανύει διάστημα $2h$. Άρα, τα σώματα δεν έχουν την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα σε οποιαδήποτε στιγμή της κίνησής τους. *(2 μον.)*

Από τη σχέση $s = \frac{1}{2}at^2$ για το διάστημα και τη σχέση $u = at$ για το μέτρο της ταχύτητας, συμπεραίνουμε ότι, $a_1 = 2a_2$ και άρα, $u_1 = 2u_2 \Rightarrow \frac{u_1}{u_2} = \frac{2}{1}$. Δηλαδή το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Α έχει διπλάσια τιμή από το μέτρο της ταχύτητας του Β.

(2 μον.)

(β) Εφαρμόζουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για το σώμα Α:

$\Sigma F_{A} = m_1 a_1 \Rightarrow S_1 - T_{o\lambda} = m_1 a_1$. ***(1 μον.)***

Είναι, $T_{o\lambda} = \mu_{o\lambda} N \Rightarrow T_{o\lambda} = \mu_{o\lambda} m_1 g$. ***(1 μον.)***

Άρα, $S_1 - \mu_{o\lambda} m_1 g = m_1 a_1$.

Είναι, $a_1 = 2a_2$. Άρα, $S_1 - \mu_{o\lambda} m_1 g = 2 m_1 a_2 \Rightarrow S_1 = m_1(\mu_{o\lambda} g + 2a_2)$. ***(1 μον.)***

Εφαρμόζουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για το σώμα Β:

$\Sigma F_{B} = m_2 a_2 \Rightarrow m_2 g - 2S_1 = m_2 a_2$. ***(1 μον.)***

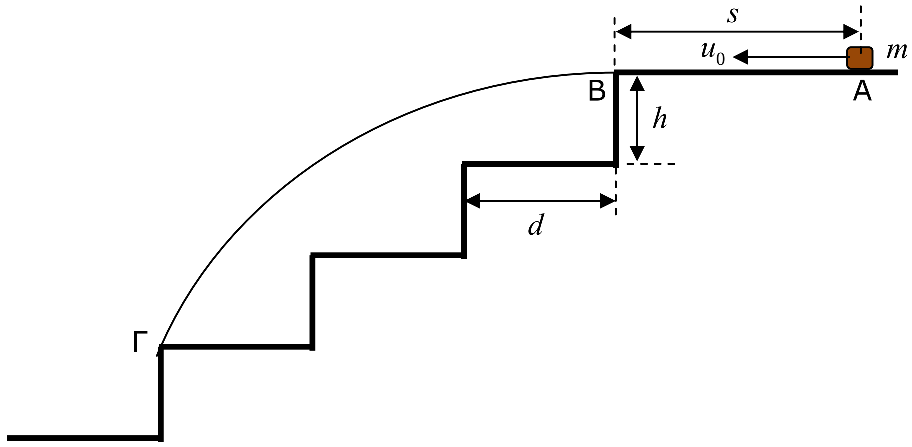
Αντικαθιστούμε τη σχέση για την τάση S_1,

$m_2 g - 2m_1(\mu_{o\lambda} g + 2a_2) = m_2 a_2 \Rightarrow (m_2 - 2m_1 \mu_{o\lambda})g = (4m_1 + m_2)a_2$. Άρα,

$a_2 = \dfrac{(m_2 - 2\mu_{o\lambda} m_1)g}{4m_1 + m_2}$. ***(2 μον.)***

Πρόβλημα - 4 **(10 μονάδες)**

Ένα σώμα μάζας m με αρχική ταχύτητα u_0, στο σημείο Α του σχήματος, διανύει απόσταση s σε οριζόντια επιφάνεια και μετά εκτελεί οριζόντια βολή, από την κορυφή Β μιας σκάλας, υπό την επίδραση μόνο του βάρους του. Μεταξύ της οριζόντιας επιφάνειας και του σώματος υπάρχει τριβή με συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu_{ολ}$. Το σώμα συναντά την άκρη του τρίτου σκαλοπατιού, στο σημείο Γ. Το κάθε σκαλοπάτι έχει ύψος h και πλάτος d. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g.



(α) Να εξάγετε τη σχέση που δίνει το μέτρο της ταχύτητας του σώματος όταν εγκαταλείπει την οριζόντια επιφάνεια, u_{0x}, στο σημείο Β, ως συνάρτηση των μεγεθών u_0, $\mu_{ολ}$, s και g.

(5 μον.)

(β) Να εξάγετε τη σχέση που δίνει την απόσταση s, ως συνάρτηση των μεγεθών u_0, $\mu_{ολ}$, d, h και g.

(5 μον.)

Λύση

(α) Α΄ Τρόπος

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - μεταβολής κινητικής ενέργειας:

$-T_{ολ}s = \frac{1}{2}m(u_{0x}^2 - u_0^2)$. ***(2 μον.)***

Είναι, $T_{ολ} = \mu_{ολ}mg$. Άρα, $\mu_{ολ}mgs = \frac{1}{2}m(u_0^2 - u_{0x}^2) \Rightarrow 2\mu_{ολ}gs = u_0^2 - u_{0x}^2$. ***(2 μον.)***

$\Rightarrow u_{0x}^2 = u_0^2 - 2\mu_{ολ}gs$. Άρα, $u_{ox} = \sqrt{u_0^2 - 2\mu_{ολ}gs}$. ***(1 μον.)***

Β΄ Τρόπος

Η δύναμη που επιβραδύνει το σώμα είναι η τριβή ολίσθησης. Άρα, $\Sigma F = ma \Rightarrow T_{ολ} = ma$.

(1 μον.)

Είναι, $T_{ολ} = \mu_{ολ}mg$. Άρα, $a = \mu_{ολ}g$. ***(2 μον.)***

Είναι, $u_{ox}^2 = u_0^2 - 2as$. Άρα, $u_{ox}^2 = u_0^2 - 2\mu_{ολ}gs$. Άρα, $u_{ox} = \sqrt{u_0^2 - 2\mu_{ολ}gs}$. ***(2 μον.)***

(β) Στην οριζόντια διεύθυνση το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα και διανύει απόσταση $3d$. Άρα,

$x = u_{0x}t \Rightarrow 3d = u_{0x}t$. ***(1 μον.)***

Στην κατακόρυφη διεύθυνση το σώμα κινείται με την επίδραση της επιτάχυνσης της βαρύτητας και διανύει απόσταση $3y$. Άρα,

$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 3h = \frac{1}{2}gt^2$. ***(1 μον.)***

Από τις δύο σχέσεις παίρνουμε, με απαλοιφή του χρόνου,

$3d = u_{0x}t \Rightarrow 9d^2 = u_{0x}^2t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{9d^2}{u_{0x}^2}$.

Αντικαθιστούμε στη δεύτερη εξίσωση,

$3h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 3h = \frac{1}{2}g\frac{9d^2}{u_{0x}^2} \Rightarrow 2hu_{0x}^2 = 3gd^2$. ***(2 μον.)***

Αντικαθιστούμε τη σχέση που βρήκαμε στο (α) ερώτημα,

$\Rightarrow 2h(u_0^2 - 2\mu_{ολ}gs) = 3gd^2$

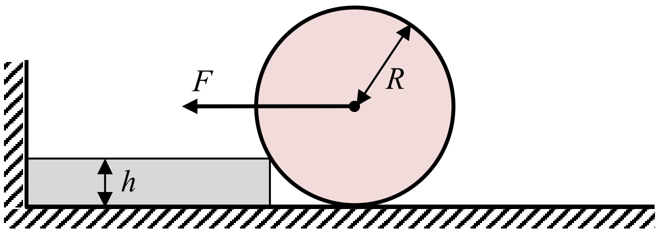
$\Rightarrow 2hu_0^2 - 4\mu_{ολ}ghs = 3gd^2 \Rightarrow s = \frac{2hu_0^2 - 3gd^2}{4\mu_{ολ}gh} = \frac{1}{2\mu_{ολ}g}(u_0^2 - \frac{3gd^2}{2h})$. ***(1 μον.)***

Πρόβλημα - 5 **(10 μονάδες)**

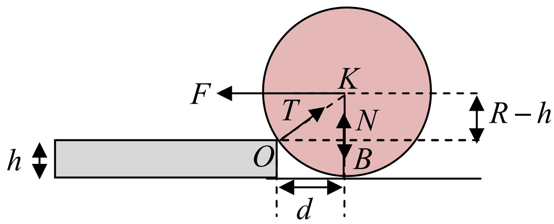
Ο ομογενής κύλινδρος στο σχήμα έχει μάζα m και ακτίνα R.

Να δείξτε ότι η ελάχιστη οριζόντια δύναμη $\vec{F}$, με διεύθυνση που περνά από το κέντρο του κυλίνδρου, που χρειάζεται για να σπρώξει τον κύλινδρο για να υπερπηδήσει ένα σκαλί ύψους h, (όπου $h < R$), έχει μέτρο $F = \dfrac{mg\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}$, όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Δεν υπάρχουν τριβές μεταξύ του κυλίνδρου και των επιφανειών επαφής με αυτόν.



Λύση



Ο κύλινδρος θα περάσει πάνω από το εμπόδιο περιστρεφόμενος γύρω από το σημείο O. Για να συμβεί αυτό, πρέπει η συνισταμένη των ροπών ως προς το O που ασκούνται στον κύλινδρο να είναι μικρότερη του μηδενός. Αυτό διότι θεωρούμε αρνητικές τις ροπές που τείνουν να στρέψουν τον κύλινδρο αριστερόστροφα. Έτσι θα ισχύει $\Sigma M < 0 \Rightarrow M_F + M_T + M_B + M_{\mathrm{T}} < 0$ (1).

Αλλά η ροπή M_{T} της δύναμης που ασκείται στον κύλινδρο από το εμπόδιο είναι μηδέν, καθώς ο φορέας της διέρχεται από το σημείο περιστροφής. Επίσης, όταν ο κύλινδρος οριακά αρχίζει να υπερπηδά το εμπόδιο, χάνει την επαφή του με το έδαφος, οπότε $N = 0$ και συνεπώς $M_N = 0$.

Η σχέση (1) λοιπόν γίνεται $M_F + M_B < 0 \Rightarrow -F\left(R-h\right) + mgd < 0$, από όπου παίρνουμε $F > \dfrac{mg}{R-h}d$. Όμως, από το ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται για το d ισχύει

$$R^2 = \left(R-h\right)^2 + d^2 \Rightarrow d = \sqrt{R^2 - \left(R-h\right)^2} = \sqrt{\left[R + \left(R-h\right)\right]\left[R - \left(R-h\right)\right]} \Rightarrow d = \sqrt{h\left(2R-h\right)}$$

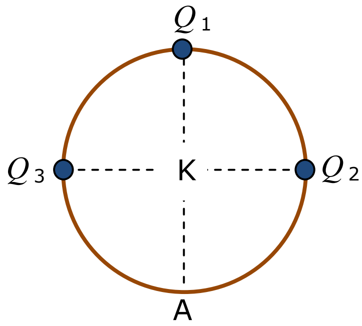
Έτσι τελικά έχουμε ότι η ελάχιστη οριζόντια δύναμη που απαιτείται έχει μέτρο

$$F = \frac{mg\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}.$$

(10 μον.)

Πρόβλημα - 6 **(15 μονάδες)**

Τρία θετικά σημειακά φορτία το καθένα με φορτίο $+2\mu C$ βρίσκονται σε περιφέρεια κύκλου ακτίνας $R=3cm$, όπως δείχνει το σχήμα. (Τα φορτία κρατούνται ακίνητα με κατάλληλο μηχανισμό).



(α) Να υπολογίσετε το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου του συστήματος των τριών φορτίων στο σημείο Α, που βρίσκεται αντιδιαμετρικά με το φορτίο Q_1.

(5 μον.)

(β) Να υπολογίσετε την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των τριών φορτίων. (Θεωρήστε το άπειρο ως σημείο μηδενικής ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας).

(5 μον.)

(γ) Να εξηγήσετε πώς μεταβάλλεται η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος αν μετακινήσουμε το φορτίο Q_1 κατά μήκος της διαμέτρου μέχρι το σημείο Α.

(5 μον.)

Λύση

(α) $E_1 = K\dfrac{Q}{4R^2} = 9x10^9 \dfrac{2x10^{-6}}{4(3x10^{-2})^2} = 5x10^6\ V/m$.

(1 μον.)

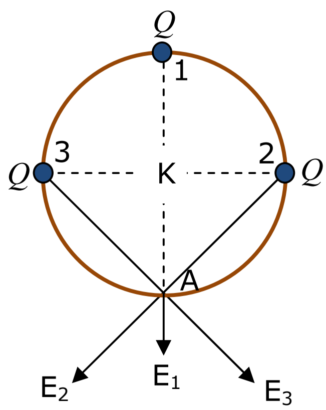
$E_2 = E_3 = K\dfrac{Q}{2R^2} = 9x10^9 \dfrac{2x10^{-6}}{2(3x10^{-2})^2} = 10^7\ V/m$.

(2 μον.)

$E_A = E_1 + 2E_2 \sigma\upsilon\nu 45^0 = 5x10^6 + 2x10^7 \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow E_A = (\sqrt{2}+0,5)x10^7\ V/m$.

(2 μον.)



(β) Θεωρούμε αρχικά να βρίσκεται ένα φορτίο Q_1 στο σημείο (1). Το έργο που κάμνουμε ενάντια στο πεδίο όταν μεταφέρουμε το φορτίο Q_2 από το άπειρο στο σημείο (2) που απέχει απόσταση $R\sqrt{2}$ από το πρώτο φορτίο Q_1 είναι: $W_{\infty,2} = -Q(V_\infty - V_2)$. Είναι $V_\infty = 0$ και $V_2 = K\dfrac{Q}{r_{1,2}}$. Άρα, $W_{\infty,2} = QV_2 = K\dfrac{QQ}{R\sqrt{2}} = K\dfrac{Q^2}{R\sqrt{2}}$. Το έργο που εμείς κάμνουμε μετατρέπεται σε δυναμική ηλεκτρική ενέργεια στο σύστημα των δύο θετικών φορτίων.

Όταν μεταφέρουμε, τέλος, το τρίτο φορτίο Q_3 στο σημείο (3) που απέχει απόσταση $r_{2,3}$ από το φορτίο Q_2 στο σημείο (2) και απόσταση $r_{1,3}$ από το Q_1 στο σημείο (1), χρειαζόμαστε ενέργεια που είναι ίση με το έργο που κάμνουμε.

Άρα, $W_{\infty,3} = -Q(V_\infty - V_3) = QV_3 = KQ(\dfrac{Q}{r_{1,3}} + \dfrac{Q}{r_{2,3}}) = KQ^2(\dfrac{1}{R\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2R})$.

Έτσι η συνολική ενέργεια

$$E_{\eta\lambda} = KQ^2\frac{1}{R}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}) = 9x10^9\,x4x10^{-12}\,\frac{1}{3x10^{-2}}(\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}) \Rightarrow E_{\eta\lambda} = 1,2(\sqrt{2} + 0,5)\ J$$

(5 μον.)

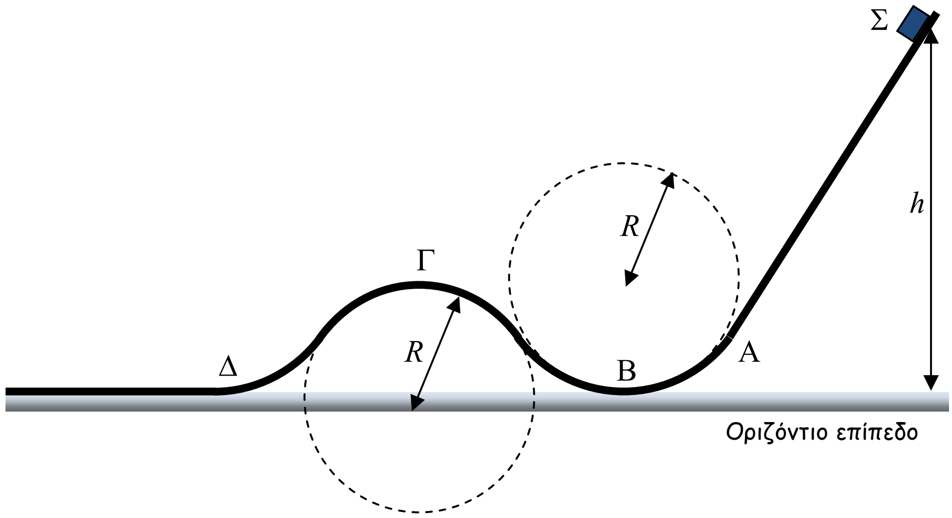
(γ) Το φορτίο Q_1 δέχεται απωστική δύναμη από τα άλλα δύο φορτία, όταν μετακινείται από το σημείο (1) μέχρι το κέντρο του κύκλου. Έτσι, αυξάνεται η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των τριών φορτίων.

Αντίθετα, όταν μετακινείται το φορτίο Q_1 από το κέντρο του κύκλου προς το σημείο Α δέχεται ελκτική δύναμη από τα άλλα δύο φορτία. Έτσι, ελαττώνεται η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των τριών φορτίων. Όταν το φορτίο Q_1 βρίσκεται ακίνητο στο σημείο Α, η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των τριών φορτίων είναι ίση με την αρχική ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των τριών φορτίων, όταν το Q_1 είναι ακίνητο στο σημείο (1).

(5 μον.)

Πρόβλημα - 7 **(15 μονάδες)**

Το σώμα Σ στο σχήμα κινείται ελεύθερα σε κατακόρυφο επίπεδο μέσα σε αυλακωτή τροχιά. Το σώμα αφήνεται από την ηρεμία να κινηθεί από ύψος h πάνω από το οριζόντιο επίπεδο. Η τροχιά είναι ευθύγραμμη μέχρι το σημείο Α. Μεταξύ των σημείων Α και Δ η τροχιά αποτελείται από κυκλικά τμήματα ακτίνας R. Από το σημείο που το σώμα αφήνεται να κινηθεί μέχρι το σημείο Δ δεν υπάρχει τριβή. Από το σημείο Δ και μετά η τροχιά είναι ευθύγραμμη και υπάρχει τριβή με συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu_{ολ}$.



(α) Να εξάγετε τη σχέση, ως συνάρτηση της ακτίνας R, που δίνει το ύψος, h, πάνω από το οριζόντιο επίπεδο, από το οποίο θα αφήνεται να κινηθεί το σώμα και δεν θα χάνει επαφή με την τροχιά, σε οποιοδήποτε σημείο της.

(6 μον.)

Θεωρήστε για τα ερωτήματα που ακολουθούν ότι η ακτίνα των κυκλικών τμημάτων της τροχιάς είναι $R = 2\,m$ και ότι το σώμα αφήνεται να κινηθεί από την ηρεμία από ύψος $h = 2,45\,m$. Η μάζα του σώματος είναι $20\,kg$. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\,m/s^2$.

(β) Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που ασκεί η τροχιά στο σώμα:
(i) Στο χαμηλότατο σημείο Β, και
(ii) Στο ανώτατο σημείο Γ.

(4 μον.)

(γ) Να υπολογίσετε την απόσταση που διανύει το σώμα, από το σημείο Δ και μετά, μέχρι να σταματήσει. Δίνεται ο συντελεστής τριβής ολίσθησης, $\mu_{ολ} = 0,25$.

(5 μον.)

Λύση

(α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, μεταξύ του σημείου που αφήνεται το σώμα και του σημείου Γ.

$mg(h-R)=\frac{1}{2}mu_{\Gamma}^2 \Rightarrow u_{\Gamma}=\sqrt{2g(h-R)}$. ***(2 μον.)***

Για να μην χάνει επαφή το σώμα θα πρέπει στο σημείο Γ (που είναι το κρίσιμο σημείο) η δύναμη που ασκεί η τροχιά στο σώμα να μην μηδενίζεται. Στο σημείο Γ ισχύει:

$mg-N=m\frac{u_{\Gamma}^2}{R} \Rightarrow N=m(g-\frac{u_{\Gamma}^2}{R})$. ***(2 μον.)***

Θα πρέπει $N>0 \Rightarrow m(g-\frac{u_{\Gamma}^2}{R})>0$

$\Rightarrow (g-\frac{2g(h-R)}{R})>0 \Rightarrow 1-\frac{2(h-R)}{R}>0 \Rightarrow R>2h-2R \Rightarrow 3R>2h \Rightarrow h<\frac{3}{2}R$.

(2 μον.)

Άρα, για να μην χάνει το σώμα επαφή στο Γ (και άρα σε οποιοδήποτε σημείο της τροχιάς), θα πρέπει το ύψος από το οποίο το σώμα θα αφήνεται να κινηθεί να είναι μικρότερο από 1,5 φορές την ακτίνα των κυκλικών τμημάτων της τροχιάς.

Όταν $h=\frac{3}{2}R$, το σώμα χάνει στιγμιαία επαφή στο σημείο Γ και επανέρχεται αμέσως ξανά στην τροχιά του.

(β) (i) $mgh=\frac{1}{2}mu_{B}^2 \Rightarrow u_{B}=\sqrt{2gh}=\sqrt{49}=7\ m/s$. ***(1 μον.)***

$N_{B}-mg=m\frac{u_{B}^2}{R} \Rightarrow N_{B}=m(g+\frac{u_{\Gamma}^2}{R}) \Rightarrow N_{B}=20(10+\frac{49}{2})=690\ \mathrm{N}$. ***(1 μον.)***

(ii) $mg(h-R)=\frac{1}{2}mu_{\Gamma}^2 \Rightarrow u_{\Gamma}=\sqrt{2g(h-R)}=\sqrt{9}=3\ m/s$. ***(1 μον.)***

$mg-N_{\Gamma}=m\frac{u_{\Gamma}^2}{R} \Rightarrow N_{\Gamma}=m(g-\frac{u_{\Gamma}^2}{R})=20(10-\frac{9}{2})=110\ \mathrm{N}$. ***(1 μον.)***

(γ) <u>Α΄ Τρόπος</u>

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - μεταβολής κινητικής ενέργειας:

$-T_{o\lambda}s=\frac{1}{2}m(u_{\tau}^2-u_0^2)$. ***(2 μον.)***

Είναι, $T_{o\lambda}=\mu_{o\lambda}mg$. Άρα, $-\mu_{o\lambda}mgs=\frac{1}{2}m(u_{\tau}^2-u_0^2) \Rightarrow 2\mu_{o\lambda}gs=u_0^2$. ***(2 μον.)***

$\Rightarrow s=\frac{u_0^2}{2\mu_{o\lambda}g}=\frac{49}{2\cdot 0,25\cdot 10}=9,8\ m$. ***(1 μον.)***

Β΄ Τρόπος

Η δύναμη που επιβραδύνει το σώμα είναι η τριβή ολίσθησης. Άρα, $\Sigma F = ma \Rightarrow T_{o\lambda} = ma$.

(1 μον.)

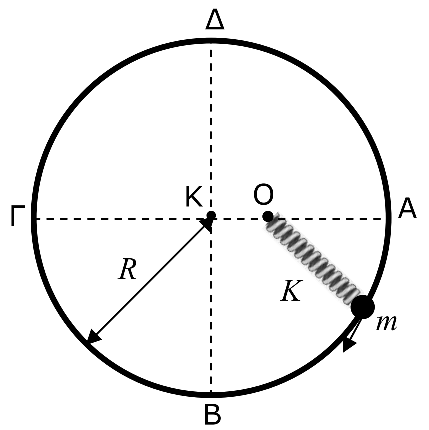
Είναι, $T_{o\lambda} = \mu_{o\lambda} mg$. Άρα, $a = \mu_{o\lambda} g$. ***(2 μον.)***

Είναι, $u_\tau^2 = u_0^2 - 2as$. Άρα, $0 = u_0^2 - 2\mu_{o\lambda} gs$.

$\mu_{o\lambda} mgs = \frac{1}{2} mu_\Delta^2 \Rightarrow s = \frac{u_\Delta^2}{2\mu_{o\lambda} g} = \frac{49}{2 \cdot 0,25 \cdot 10} = 9,8\, m$. ***(2 μον.)***

Πρόβλημα - 8 **(20 μονάδες)**

Μια χάντρα μάζας m κινείται χωρίς τριβές σε κατακόρυφη κυκλική στεφάνη ακτίνας R. Η στεφάνη είναι αμελητέας μάζας και ακλόνητη. Η χάντρα είναι συνδεδεμένη με αβαρές ελατήριο σταθεράς K, που ικανοποιεί το νόμο του Hooke, σε όλα τα σημεία της κίνησης του σώματος. Το άλλο άκρο του ελατηρίου συνδέεται με το ακίνητο σημείο Ο το οποίο βρίσκεται πάνω στην οριζόντια ακτίνα ΚΑ και απέχει από το κέντρο Κ της στεφάνης απόσταση ίση με $(KO) = \frac{5}{12} R$, όπως δείχνει το σχήμα.



Δίνουμε στη χάντρα στο σημείο Α αρχική ταχύτητα μέτρου u_0, με διεύθυνση εφαπτομενικά της τροχιάς και φορά προς τα κάτω, και την αφήνουμε να κινηθεί στην κατακόρυφη περιφέρεια της στεφάνης. Στο σημείο Α το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Δίνεται η σταθερά της επιτάχυνσης της βαρύτητας g.

(α) Να εξηγήσετε αν το μέτρο της ταχύτητας της χάντρας στο σημείο Γ (που βρίσκεται αντιδιαμετρικά από το σημείο Α), είναι μεγαλύτερο, μικρότερο ή ίσο με το μέτρο της ταχύτητας στο Α.

(6 μον.)

(β) Να εξάγετε τη σχέση που δίνει το μέτρο της ταχύτητας της χάντρας στο κατώτατο σημείο Β της τροχιάς, ως συνάρτηση των μεγεθών u_0, R, K, m και g.

(6 μον.)

(γ) Να εξάγετε τη σχέση που δίνει το ελάχιστο μέτρο της ταχύτητας της χάντρας στο σημείο Α, $u_{0(\min)}$, ως συνάρτηση των μεγεθών R, K, m και g, ώστε η χάντρα να μπορεί να εκτελεί πλήρη κυκλική τροχιά.

(8 μον.)

Λύση

(α) Το μέτρο της ταχύτητας της χάντρας στο σημείο Γ (που βρίσκεται αντιδιαμετρικά από το σημείο Α), είναι μικρότερο από το μέτρο της ταχύτητας στο Α. ***(2 μον.)***

Στο σημείο Α και στο σημείο Γ η χάντρα έχει την ίδια δυναμική βαρυτική ενέργεια. Από το σημείο Α μέχρι το σημείο Γ υπάρχει αύξηση της δυναμικής ελαστικής ενέργειας του ελατηρίου. Άρα, για να διατηρείται η μηχανική ενέργεια, πρέπει η κινητική ενέργεια της χάντρας στο σημείο Α είναι μικρότερη από την κινητική ενέργεια σημείο Γ, οπότε και το μέτρο της ταχύτητας της χάντρας στο σημείο Γ είναι μικρότερο από το μέτρο της ταχύτητας στο Α. ***(4 μον.)***

(β) Διατήρηση μηχανικής ενέργειας: $mgR+\frac{1}{2}mu_0^2=\frac{1}{2}K(\Delta\ell)^2+\frac{1}{2}mu_B^2$. ***(2 μον.)***

Υπολογίζουμε, από το πυθαγόρειο θεώρημα, το μήκος (ΒΟ) του ελατηρίου στο σημείο Β.

$(BO)^2=R^2+(KO)^2\Rightarrow(BO)^2=R^2+\frac{25}{144}R^2\Rightarrow(BO)=\frac{13}{12}R$. ***(1 μον.)***

Υπολογίζουμε την επιμήκυνση του ελατηρίου.

$\Delta\ell=(\mathrm{BO})-(\mathrm{AO})=\frac{13}{12}R-\frac{7}{12}R\Rightarrow\Delta\ell=\frac{1}{2}R$. ***(1 μον.)***

Άρα, η διατήρηση της ενέργειας γίνεται:

$$\frac{1}{2}mu_B^2=mgR+\frac{1}{2}mu_0^2-\frac{1}{8}KR^2\Rightarrow u_B^2=u_0^2+2gR-\frac{KR^2}{4m}$$

$$\Rightarrow u_B=\sqrt{u_0^2+2gR-\frac{KR^2}{4m}}.$$ ***(2 μον.)***

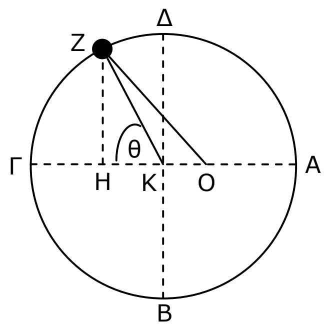
<u>Σημείωση</u>: Θα πρέπει $K<\frac{4m}{R}(\frac{u_0^2}{R}+2g)$, ώστε η ποσότητα στη ρίζα να έχει θετική τιμή.

(γ) Η μηχανική ενέργεια διατηρείται. Αυτή είναι βαρυτική δυναμική ενέργεια, ελαστική δυναμική ενέργεια και κινητική ενέργεια. Άρα, σε ένα τυχαίο σημείο της τροχιάς της χάντρας, η διατήρηση της μηχανικής δίνει τη σχέση,

$E_{\Delta(\varepsilon\lambda)} + E_{\Delta(\beta\alpha\rho)} + E_{(\kappa\iota\nu)} = E_0$, όπου E_0 είναι η αρχική ενέργεια της χάντρας, στο σημείο Α. Είναι, $E_0 = \frac{1}{2}mu_0^2$. Πήραμε ως επίπεδο αναφοράς της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας ίσο με μηδέν, το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το σημείο Α. Στο Α η ελαστική δυναμική ενέργεια είναι μηδέν (Το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος). Άρα,

$E_{\Delta(\varepsilon\lambda)} + E_{\Delta(\beta\alpha\rho)} + E_{(\kappa\iota\nu)} = \frac{1}{2}mu_0^2$. Άρα, η αρχική ταχύτητα είναι συνάρτηση των τριών ενεργειών. Σε μια τυχαία θέση της τροχιάς θα έχουμε,

$\frac{1}{2}K(\Delta\ell)^2 + mgh + \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mu_0^2$, ή $K(\Delta\ell)^2 + 2mgh + mu^2 = mu_0^2$. ***(1 μον.)***



Για να έχουμε ελάχιστη ταχύτητα στο σημείο Α θα πρέπει να μετατραπεί όλη η αρχική κινητική ενέργεια μόνο σε δυναμική ενέργεια (ελαστική και βαρυτική), οπότε θα έχουμε μέγιστη δυναμική ενέργεια. ***(1 μον.)***

Έστω, ότι αυτό συμβαίνει σε ένα τυχαίο σημείο, Ζ, μεταξύ του Γ και του Δ. ***(1 μον.)***

Από το σημείο Β και μέχρι το σημείο Γ η δυναμική βαρυτική ενέργεια και η ελαστική δυναμική ενέργεια αυξάνονται. Άρα η κινητική ενέργεια από το Β ως το Γ ελαττώνεται. Επομένως, αν η ταχύτητα της χάντρας μηδενιστεί μεταξύ του σημείου Β και του Γ (νοουμένου ότι θα καταφέρει η χάντρα να φτάσει το κατώτατο σημείο Β), η χάντρα δεν θα φτάσει ποτέ στο σημείο Γ. ***(1 μον.)***

Έστω το σημείο Η να είναι η προβολή του Ζ στον οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο του κύκλου. Ονομάζουμε θ τη γωνία ΖΚΓ.

Υπολογίζουμε το ύψος ΖΗ πάνω από το επίπεδο αναφοράς.

Άρα, $h = R\eta\mu\theta$. Άρα, η βαρυτική δυναμική ενέργεια της χάντρας είναι,

$E_\Delta = mgh \Rightarrow E_\Delta = mgR\eta\mu\theta$. ***(1 μον.)***

Υπολογίζουμε το μήκος του ελατηρίου στη θέση Ζ. Είναι ℓ=(ΖΟ). Είναι,

$\ell^2 = (ZH)^2 + (HO)^2 = (ZH)^2 + [(HK) + (KO)]^2$. Άρα,

$$\ell^2 = h^2 + (R\sigma\upsilon\nu\theta + \frac{5R}{12})^2 \Rightarrow \ell^2 = R^2\eta\mu^2\theta + (R\sigma\upsilon\nu\theta + \frac{5R}{12})^2$$

$$\Rightarrow \ell^2 = \frac{R^2}{144}(169 + 120\sigma\upsilon\nu\theta) \Rightarrow \ell = \frac{R}{12}\sqrt{169 + 120\sigma\upsilon\nu\theta}$$ ***(1 μον.)***

Η επιμήκυνση του ελατηρίου στο σημείο Ζ είναι

$$\Delta\ell = \ell - \ell_0 = \frac{R}{12}\sqrt{169 + 120\sigma\upsilon\nu\theta} - \frac{7R}{12} = \frac{R}{12}(\sqrt{169 + 120\sigma\upsilon\nu\theta} - 7)$$ ***(1 μον.)***

Άρα, η δυναμική βαρυτική ενέργεια και η ελαστική δυναμική ενέργεια στο σημείο Ζ, εκφράζονται ως συνάρτηση της γωνίας θ. Η μέγιστη τιμή της δυναμικής αυτής ενέργειας συμβαίνει στη γωνία θ για την οποία $\frac{dE_\Delta}{d\theta}=0$.

Έτσι, από τη θ και την εξίσωση της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας υπολογίζεται η ελάχιστη τιμή της ταχύτητας στο Α. ***(1 μον.)***

<u>Δεκτές και οι πιο κάτω δύο περιπτώσεις:</u>

<u>Στην πρώτη ειδική περίπτωση</u> που όλη η αρχική κινητική ενέργεια μεταβιβάζεται στο ελατήριο στο σημείο Γ, ως ελαστική δυναμική ενέργεια, (Αυτό συμβαίνει όταν η σταθερά του ελατηρίου είναι πολύ μεγάλη), θα έχουμε,

$\frac{1}{2}mu_0^2=\frac{1}{2}K(\Delta\ell)^2 \Rightarrow mu_0^2=K(\frac{5R}{6})^2 \Rightarrow u_0=\frac{5R}{6}\sqrt{\frac{K}{m}}$. Αυτή είναι η ελάχιστη ταχύτητα στο Α, στην περίπτωση αυτή. ***(6 μον.)***

Με την ταχύτητα αυτή θα πρέπει η χάντρα να φτάσει στο σημείο Δ.

Από τη διατήρηση μηχανικής ενέργειας έχουμε, $u_\Delta=\sqrt{\frac{32KR^2}{72m}-2gR}$. Τότε, $K>\frac{9mg}{2R}$.

(2 μον.)

<u>Στη δεύτερη ειδική περίπτωση</u> που όλη η αρχική κινητική ενέργεια μεταβιβάζεται στο σώμα ως βαρυτική δυναμική ενέργεια, στο σημείο Δ (Αυτό συμβαίνει όταν η σταθερά του ελατηρίου είναι πολύ μικρή), θα έχουμε,

$$\frac{1}{2}mu_0^2=\frac{1}{2}K(\Delta\ell)^2+mgh \Rightarrow mu_0^2=K(\frac{R}{2})^2+2mgR \Rightarrow u_0^2=\frac{KR^2}{4m}+2gR \Rightarrow u_0=\sqrt{\frac{KR^2}{4m}+2gR}$$

Αυτή είναι η ελάχιστη ταχύτητα στο Α, στην περίπτωση αυτή. ***(6 μον.)***

Με την ταχύτητα αυτή, έχουμε $u_B=\sqrt{4gR}>0$.

Στο σημείο Γ, έχουμε τότε, $u_\Gamma=\sqrt{2gR-\frac{4KR^2}{9m}}$. Τότε, $K<\frac{9mg}{2R}$. ***(2 μον.)***