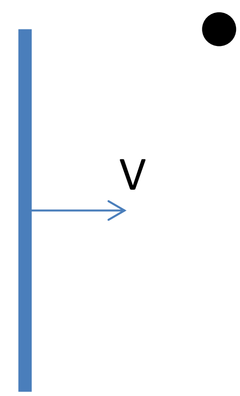
ΕΝΩΣΗ ΚΥΠΡΙΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ

27^{η} ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ (Πρώτη Φάση)
Κυριακή, 16 Δεκεμβρίου, 2012

Προτεινόμενες Λύσεις

Πρόβλημα-1 (15 μονάδες)

Μια ράβδος μήκους $\boldsymbol{l}$, ολισθαίνει με τον άξονα της κάθετο στο δάπεδο πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια με ταχύτητα $\boldsymbol{V}$ και συγκρούεται ελαστικά με μια ακίνητη μπάλα όπως στο σχήμα. Τόσο η μπάλα όσο και η ράβδος έχουν μάζα $\boldsymbol{m}$. Η ράβδος αποτελείται από προσμείξεις υλικών με αποτέλεσμα η ροπή αδράνεια της ως προς το κέντρο μάζας της (το οποίο βρίσκεται στο κέντρο της) να είναι $\boldsymbol{I_\rho}$. Αν μετά την σύγκρουση η μπάλα και το κέντρο μάζας της ράβδου κινούνται με την ίδια ταχύτητα $\boldsymbol{u}$ προς τα δεξιά:



i) να βρείτε την ταχύτητα $\boldsymbol{u}$ σαν συνάρτηση της αρχικής ταχύτητας $\boldsymbol{V}$ της ράβδου **(μονάδες 3)**

ii) να δείξετε ότι η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου αμέσως μετά την κρούση (ως προς το κέντρο μάζας της) δίνεται από τη σχέση:

$$\omega = \frac{mVl}{4I_\rho}$$ **(μονάδες 7)**

iii) να βρεθεί η ροπή αδράνειας της ράβδου $I_\rho = f(m, l)$ ως προς το κέντρο μάζας της. **(μονάδες 5)**

Λύση

i) Γράφοντας την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα ράβδος-μπάλα έχουμε:

$$P_{\alpha\rho\chi} = P_{\tau\varepsilon\lambda} \qquad (\textbf{μον. 1})$$
$$\Rightarrow \ mV = mu + mu \qquad (\textbf{μον. 1})$$
$$\Rightarrow \ V=2u \Rightarrow u=\frac{V}{2} \ (1) \qquad (\textbf{μον. 1})$$

ii) Αφού στο σύστημα διατηρείται η στροφορμή έχουμε:

$$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\varepsilon\lambda} \qquad (\textbf{μον. 2})$$
$$\Rightarrow 0 = mu\frac{l}{2} - I_\rho\omega \quad (\textbf{μον. 2})$$

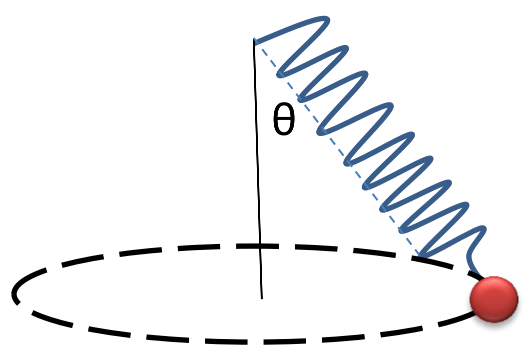
$\Rightarrow \omega = \frac{mul}{2I_\rho}$ (**μον. 1**) και με τη βοήθεια της (1) έχουμε $\omega = \frac{mVl}{4I_\rho}$ (2) (**μον. 2**)

iii) Η κρούση είναι ελαστική, άρα υπάρχει διατήρηση της κινητικής ενέργειας συνεπώς:

$\frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}I_\rho\omega^2 + \frac{1}{2}mu^2$ (**μον. 2**)

Από (1) και (2) έχουμε: $I_\rho = \frac{1}{8}ml^2$ (**μον. 3**)

Πρόβλημα-2 **(20 μονάδες)**



Ένα σώμα μάζας **m** αναρτάται σε ένα ελατήριο σταθεράς **k** και αρχικού φυσικού μήκους l_0 και ισορροπεί κατακόρυφα επιμηκύνοντας το ελατήριο κατά Δl_1 από το φυσικό του μήκος. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο σε ένα μηχανισμό ο οποίος έχει τη δυνατότητα α) να απομακρύνει το ελατήριο από την κατακόρυφη θέση σε ελεγχόμενες γωνίες **θ** και β) να περιστρέφει το ελατήριο κυκλικά σχηματίζοντας ένα κώνο γωνίας **θ**.

Έστω ότι θέτουμε το παραπάνω σύστημα σε λειτουργία αφήνοντας τον μηχανισμό να εκτρέψει το ελατήριο από την κατακόρυφη θέση κατά γωνία **θ** έτσι ώστε η μάζα να περιστρέφεται κυκλικά στο επίπεδο x-y σχηματίζοντας ένα φυσικό ανάλογο του κωνικού εκκρεμούς.

Ζητούνται:

i) η αρχική επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του **(μονάδες 2)**

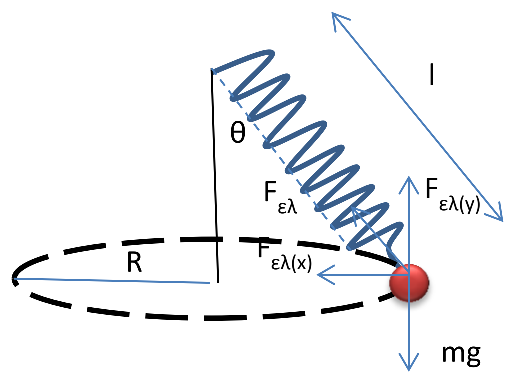
ii) η γωνιακή ταχύτητα ω της σφαίρας στο επίπεδο x-y **(μονάδες 7)**

iii) η ελάχιστη και η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα που μπορεί να αποκτήσει η σφαίρα στο οριζόντιο επίπεδο x-y **(μονάδες 4)**

iv) η γραφική παράσταση του τετραγώνου της γωνιακής ταχύτητας της σφαίρα συναρτήσει της ελεγχόμενης παραμέτρου εκτροπής cos(θ) από την κατακόρυφο **(μονάδες 4)**

v) σχολιάστε τα αποτελέσματα σας από πλευράς φυσικής όταν η γωνιακή ταχύτητα ω της σφαίρα στο επίπεδο x-y γίνει μέγιστη **(μονάδες 3)**

Λύση



i) $mg = K \cdot \Delta l_1 \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{mg}{K}$ (1) **(μον. 2)**

ii) Από το σχήμα : $\sin\theta = \frac{R}{l} \Rightarrow R = l \cdot \sin\theta$ (2) **(μον. 1)**

Από την ανάλυση σε άξονες x και y :

- $F_{\varepsilon\lambda_y} = mg \Rightarrow K \cdot \Delta l_2 \cdot \cos\theta = mg \Rightarrow$
  $\Delta l_2 = \frac{mg}{K\cos\theta}$ (3) **(μον. 1)**
- $F_{\varepsilon\lambda_x} = \frac{m \cdot v^2}{R} = \frac{m\omega^2 R^2}{R} = m\omega^2 R$ (4) **(μον. 1)**

$\Rightarrow K \cdot \Delta l_2 \cdot \sin\theta = m\omega^2 R$, και από την (2) έχουμε:

$\Rightarrow K \cdot \Delta l_2 \cdot \sin\theta = m\omega^2 l \sin\theta$, αντικαθιστώντας το Δl_2 από την (3) έχουμε:

$K \cdot \frac{mg}{K\cos\theta} = m\omega^2 l \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{l\cos\theta} \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{\cos\theta \cdot (l_0 + \Delta l_2)}$ **(μον. 2)**

Συνεπώς αντικαθιστώντας το Δl_2 από την (3) και χρησιμοποιώντας την (1) παίρνουμε:

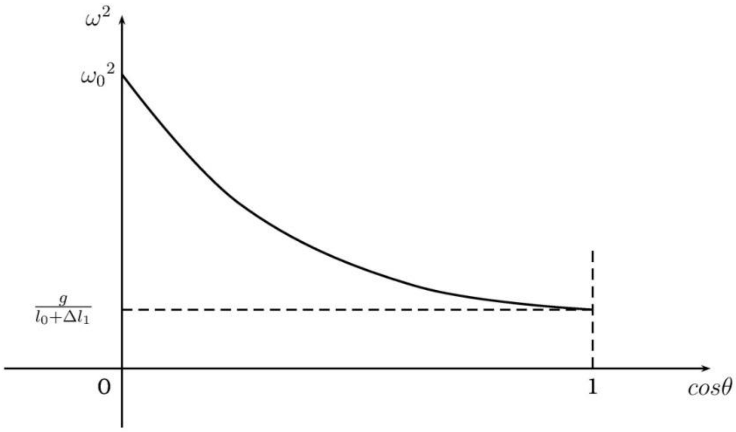
$\Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{l_0\cos\theta + \Delta l_1}$ **(μον. 2)**

iii) Αν $\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{l_0 + \Delta l_1}$, $\omega = \omega_{min}$ **(μον. 2)**

Αν $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{\Delta l_1} = \frac{K}{m} = \omega_0^2$, $\omega = \omega_{\max}$ **(μον. 2)**

iv) Η σχέση που πρέπει να κάνουμε γραφική παράσταση είναι:

$$\Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{g}{l_0 \cos\theta + \Delta l_1}$$

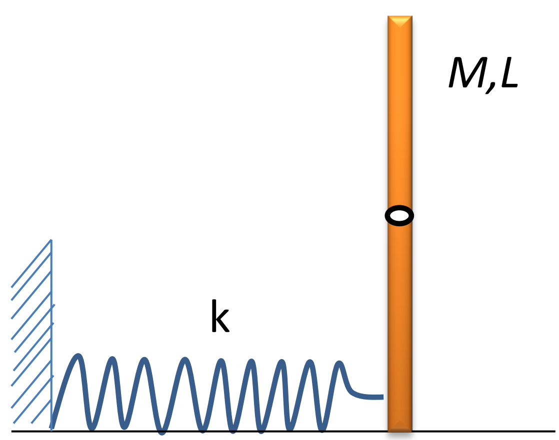


(μον. 2 “μορφή” & μον. 2 “όρια”)

v) Αφού $\Delta l_2 = \frac{mg}{K\cos\theta}$ και για μέγιστη γωνιακή ταχύτητα $\cos(\theta) = 0$ τότε $\Delta l_2 \to \infty$, (**μον. 2**) άρα το μήκος του κωνικού εκκρεμούς απειρίζεται αφού έχει επέλθει συντονισμός μιας και η συχνότητα του συστήματος ταυτίζεται με την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή (ελατήριο-μάζα) $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ (**μον. 1**)

<u>Πρόβλημα-3</u> **<u>(20 μονάδες)</u>**

Θεωρείστε το σύστημα που φαίνεται στο σχήμα το οποίο αποτελείται από μια ράβδο μήκους L και μάζας **M**. Στο κέντρο της ράβδου υπάρχει μια τρύπα η οποία της επιτρέπει να περιστρέφεται χωρίς τριβές ως προς το κέντρο μάζας της. Αν το ένα άκρο του ελατηρίου σταθεράς **k** είναι στερεωμένο στο κάτω μέρος της ράβδου και το άλλο σε ακλόνητο τοίχο, ζητούνται:



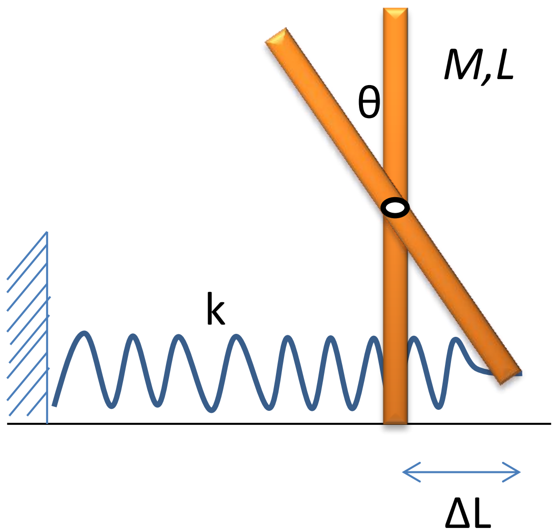
i) Να δείξετε ότι η ράβδος μπορεί να ταλαντώνεται ελεύθερα γύρω από το κέντρο της κάνοντας γραμμική αρμονική κίνηση **(μονάδες 7)**

ii) Να δείξετε ότι για μικρές γωνίες θ ικανοποιείται η σχέση:
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3k}{M}\theta = 0$$ **(μονάδες 8)**

iii) Να βρεθεί η περίοδος του τη ταλάντωσης **(μονάδες 5)**

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της ράβδου είναι $I = \frac{1}{12} ML^2$

Λύση



$\Delta L = \frac{L}{2}\theta$ (3) (**μον. 2**)

Η ροπή αδράνειας της ράβδου είναι: $I = \frac{1}{12} ML^2$

$\tau = I\alpha \Rightarrow -r.F_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{12} ML^2.\frac{d^2\theta}{dt^2}$ (1) αφού $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ και $r = \frac{L}{2}$ (2) (**μον. 5**)

Από τις σχέσεις (1) και (2)

$-\frac{L}{2}.k.\Delta L = \frac{1}{12} ML^2.\frac{d^2\theta}{dt^2}$ (4) (**μον. 3**) για μικρές γωνίες ισχύει $\Delta L = \frac{L}{2}\theta$ (3)

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

⇨ $-\frac{L}{2}.k.(\frac{L}{2}\theta) = \frac{1}{12} ML^2.\frac{d^2\theta}{dt^2}$ (**μον. 3**)

⇨ $-k.\theta = \frac{1}{3} M.\frac{d^2\theta}{dt^2}$

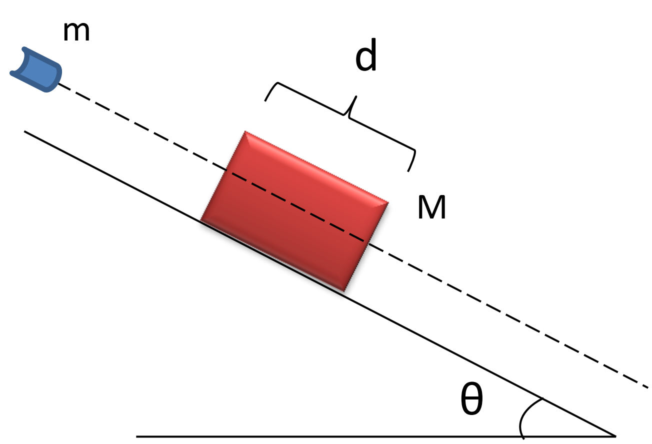
⇨ $-3.k.\theta = M.\frac{d^2\theta}{dt^2}$ (**μον. 2**)

ii. $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{3k}{M}\theta=0$ Γ.Α.Τ.

iii. $\omega^2=\frac{3k}{M}$ **(μον. 2)** ➔ $\omega=\sqrt{\frac{3k}{M}}$ ➔ $T=2\pi\sqrt{\frac{M}{3\kappa}}$ **(μον. 3)**

<u>Πρόβλημα-4</u> **<u>(20 μονάδες)</u>**

Ένα σώμα μάζας **M=1 Kg** και πάχους **d=0.1 m** βρίσκεται ακίνητο στην κορυφή ενός κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης **20°** με την οριζόντια διεύθυνση. Μια σφαίρα μάζας **m=5 gr** η οποία κινείται παράλληλα προς το κεκλιμένο επίπεδο με ταχύτητα **u=300 m/s** κτυπά το σώμα M, το διαπερνά και εξέρχεται έχοντας χάσει το **75%** της αρχικής κινητικής της ενέργειας.



i) Ποια είναι η ταχύτητα του σώματος M ακριβώς τη στιγμή που η σφαίρα εξέρχεται από αυτό. (Υποθέστε ότι η σφαίρα και το σώμα M δεν αλλάζουν μάζα) **(μονάδες 4)**

ii) Ποια είναι η μέση δύναμη που ασκείται στη σφαίρα καθώς διαπερνά το σώμα M; **(μονάδες 8)**

iii) Αν το σώμα μάζας M στη συνέχεια γλιστρά κατά **s=50m** προς τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου πριν σταματήσει, ποιος είναι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και της επιφάνειας του επιπέδου; **(μονάδες 8)**

<u>Λύση</u>

i) Από τα δεδομένα του προβλήματος γνωρίζουμε ότι η σφαίρα εξέρχεται από το σώμα M έχοντας χάσει το 75% της αρχικής της ενέργειας.
Επομένως

$E_{\kappa\iota\nu}^{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{4} E_{\kappa\iota\nu}^{\alpha\rho\chi}$ $(\boldsymbol{\mu o \nu. 1}) \Rightarrow \frac{1}{2} m u_{\sigma\varphi(\tau\varepsilon\lambda)}^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} m u_{\sigma\varphi(\alpha\rho\chi)}^2\right)$

$\Rightarrow u_{\sigma\varphi(\tau\varepsilon\lambda)}^2 = \frac{1}{4} u_{\sigma\varphi(\alpha\rho\chi)}^2 \Rightarrow u_{\sigma\varphi(\tau\varepsilon\lambda)} = \frac{1}{2} u_{\sigma\varphi(\alpha\rho\chi)}$ *(1)* (**μον. 1**)

Από διατήρηση της ορμής

$P_{\alpha\rho\chi} = P_{\tau\varepsilon\lambda}$ $(\boldsymbol{\mu o \nu. 1}) \Rightarrow m u_{\sigma\varphi(\alpha\rho\chi)} = m u_{\sigma\varphi(\tau\varepsilon\lambda)} + M v$

$\Rightarrow v = \frac{m}{M}\left(u_{\sigma\varphi(\alpha\rho\chi)} - u_{\sigma\varphi(\tau\varepsilon\lambda)}\right)$ και χρησιμοποιώντας την (1) έχουμε:

$v = \frac{m}{M}\frac{u_{\sigma\varphi(\alpha\rho\chi)}}{2}$ = 0,75 m/s (**μον. 1**)

ii) <u>α' τρόπος</u>

Έστω $F_{\sigma\varphi}$ η δύναμη που αναπτύσσεται στη σφαίρα καθώς διαπερνά το σώμα M, τότε: $F_{\sigma\varphi} = m a_{\sigma\varphi}$, όπου $a_{\sigma\varphi}$ η μέση επιτάχυνση της σφαίρας μέσα στο σώμα M. (**μον. 2**)

Όμως $u_{\sigma\varphi(\tau\varepsilon\lambda)}^2 = u_{\sigma\varphi(\alpha\rho\chi)}^2 + 2a_{\sigma\varphi}(x - x_0) \Rightarrow$

$u_{\sigma\varphi(\tau\varepsilon\lambda)}^2 = u_{\sigma\varphi(\alpha\rho\chi)}^2 + 2a_{\sigma\varphi}\Delta x$, όπου Δx το πάχος του σώματος μάζας M

Επομένως $a_{\sigma\varphi} = \frac{u_{\sigma\varphi(\tau\varepsilon\lambda)}^2 - u_{\sigma\varphi(\alpha\rho\chi)}^2}{2\Delta x}$ (**μον. 3**) και χρησιμοποιώντας την σχέση (1) έχουμε $a_{\sigma\varphi} = \frac{\frac{u_{\sigma\varphi(\alpha\rho\chi)}^2}{4} - u_{\sigma\varphi(\alpha\rho\chi)}^2}{2\Delta x} = \frac{-3u_{\sigma\varphi(\alpha\rho\chi)}^2}{8\Delta x}$, (**μον. 2**) το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι έχουμε επιβράδυνση.

Άρα η δύναμη που αναπτύσσεται στη σφαίρα είναι:

$$F_{\sigma\varphi} = -m\frac{3u_{\sigma\varphi(\alpha\rho\chi)}^2}{8\Delta x} = -1687{,}5\ N\ (\boldsymbol{\mu o \nu. 1})$$

<u>β' τρόπος</u>

Από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{m\Delta u_{\sigma\varphi}}{\Delta t} = \frac{m}{\Delta t}\frac{u_{\sigma\varphi(\alpha\rho\chi)}}{2} = m a_{\sigma\varphi}\ (\boldsymbol{\mu o \nu. 2})$$

Συνεπώς $u_{\sigma\varphi(\tau\varepsilon\lambda)} = u_{\sigma\varphi(\alpha\rho\chi)} + a_{\sigma\varphi}\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{u_{\sigma\varphi(\tau\varepsilon\lambda)} - u_{\sigma\varphi(\alpha\rho\chi)}}{a_{\sigma\varphi}} = 4.4x10^{-4}s$

(**μον. 3**)

Από το θεώρημα Έργου-Ενέργειας έχουμε:

$$\Delta E_{\kappa\iota\nu} = W_F\ (\boldsymbol{\mu o \nu. 2})$$

$$\Delta E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}m\left(u^2_{\sigma\varphi(\tau\varepsilon\lambda)} - u^2_{\sigma\varphi(\alpha\rho\chi)}\right) = F\Delta x$$

$$\Rightarrow F = -\frac{u^2_{\sigma\varphi(\alpha\rho\chi)} - u^2_{\sigma\varphi(\tau\varepsilon\lambda)}}{2\Delta x}m = -1678{,}5\ N\ (\boldsymbol{\mu o\nu.\ 1})$$

iii) Από το θεώρημα Έργου-Ενέργειας για το σώμα M έχουμε:

$$\Delta E_{\kappa\iota\nu} = W_F\ (\boldsymbol{\mu o\nu.\ 1})$$

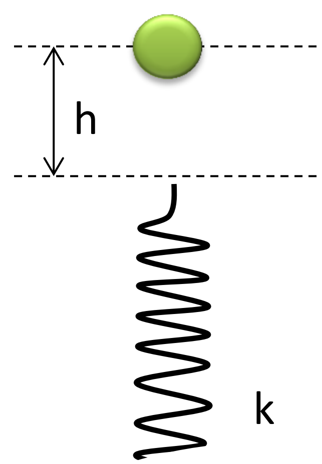
$$\Delta E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}M\left(v^2_{(\tau\varepsilon\lambda)} - v^2_{(\alpha\rho\chi)}\right) = -TS + Mgh\ (\boldsymbol{\mu o\nu.\ 3})$$

Αφού $v_{(\tau\varepsilon\lambda)} = 0$, $T = \mu N = \mu Mg\sigma\upsilon\nu(\theta)$ (**μον. 1**) και $h = S\eta\mu(\theta)$, (**μον. 1**) τότε:

$$\mu = \frac{\frac{1}{2}v^2_{(\alpha\rho\chi)} + gS\eta\mu(\theta)}{gS\sigma\upsilon\nu(\theta)} = 0{,}36\ \ (\boldsymbol{\mu o\nu.\ 2})$$

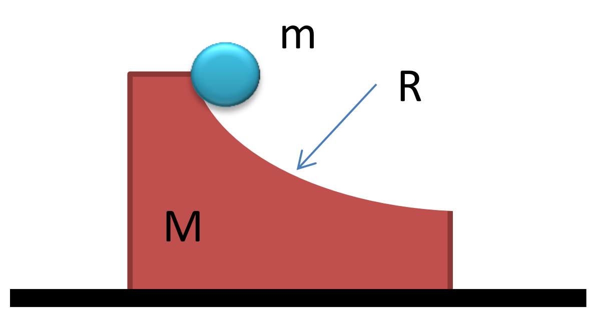
<u>Πρόβλημα-5</u> **<u>(25 μονάδες)</u>**

Α) Μια μάζα **m** αφήνεται από ύψος **h** πάνω από ένα κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς **k**. Να δείξετε ότι όταν η μάζα φθάνει στιγμιαία σε ηρεμία, το ελατήριο συσπειρώνεται κατά:



$$x = \frac{mg}{k}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}}\right)$$ **(μονάδες 10)**

Β) Ένα τούβλο έχει κοίλη επιφάνεια (όπως στο σχήμα) ακτίνας **R**, έχει μάζα **M** και βρίσκεται πάνω σε μια λεία επιφάνεια. Ένα μικρότερο σώμα μάζας **m** αφήνεται από την κορυφή του τούβλου και γλιστρά (χωρίς να κυλίεται) προς τα κάτω χωρίς τριβές. Να βρεθούν οι ταχύτητες του τούβλου και του σώματος ως προς το έδαφος την στιγμή που χάνουν επαφή το ένα με το άλλο. **(μονάδες 15)**



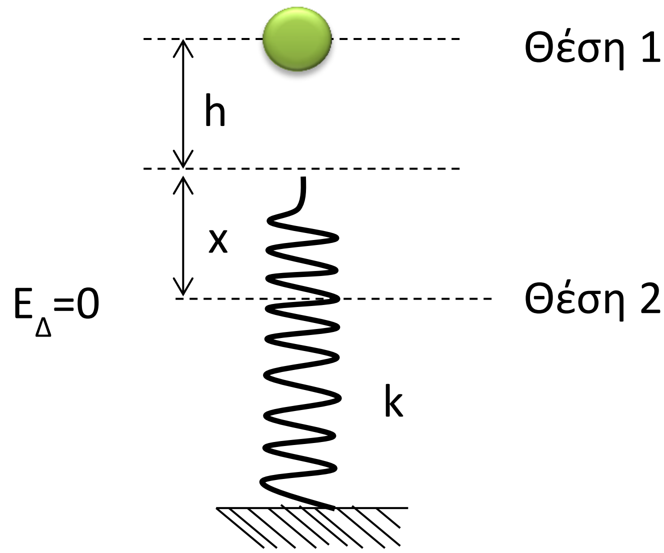
<u>**Λύση**</u>

A) $E_{μηχ1}= E_{μηχ2}$ **(μον. 3)**

$E_{δυν1}=E_{ελ2}$ **(μον. 1)**

$mg(h+x)=\frac{1}{2}kx^2$ **(μον. 2)**

$mgh + mgx=\frac{1}{2}kx^2$



Προκύπτει εξίσωση β΄ βαθμού

$\frac{1}{2}kx^2 - mgx - mgh =0$

Έχει ρίζες

$X_{1,2} = \frac{mg \pm \sqrt{m^2g^2 + 2kmgh}}{k}$ **(μον. 2)**

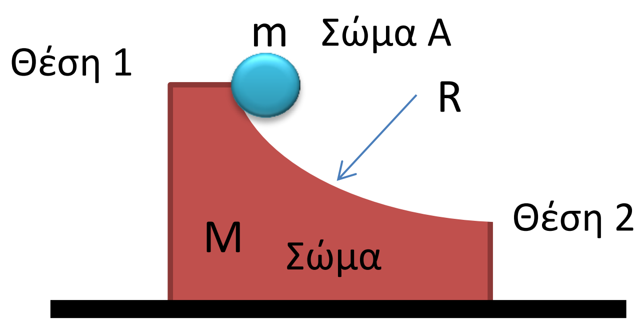
Δεκτή λύση $x = \frac{mg}{k}\left(1+\sqrt{1+\frac{2kh}{mg}}\right)$ **(μον. 2)**

B) $E_{μηχ1}=E_{μηχ2}$ **(μον. 2)**

$E_{δυν1}= E_{κιν2A} + E_{κιν2B}$ **(μον. 2)**

$mgh = \frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}Mv_B^2$

$mgR = \frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}Mv_B^2$ (1) **(μον. 1)**



$ΣF_{εξ}=0$ (Μονωμένο Σύστημα)

$ΣF_{εξ}= \frac{ΔP}{Δt}$ ➔ $ΔP =0$ ➔ $P_{τελ}=P_{αρχ}$ ➔ $P_A+P_B = P'_A+P'_B$ **(μον. 2)**

➔ $0 + 0 = mv_A - Mv_B$ ➔ $v_B = \frac{mv_A}{M}$ (2) **(μον. 3)**

Από τις σχέσεις (1) και (2)

$mgR = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}M(\frac{mv_A}{M})^2$ **(μον. 3)**

$2gR = v_A^2 + \frac{mv_A^2}{M}$ ➔ $v_A^2(1+\frac{m}{M}) = 2gR$

⇨ $v_A = \sqrt{\frac{2gR}{1+\frac{m}{M}}}$ **(μον. 1)**

και ➔ $v_B = \frac{mv_A}{M}$ ➔ $v_B = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{2gR}{1+\frac{m}{M}}}$ **(μον. 1)**